

ตรรกศาสตร์

ประพจน์

ในเรื่องตรรกศาสตร์นี้ เราจะสนใจศึกษาเฉพาะประโยคที่เป็นประพจน์เท่านั้น

ประพจน์ (statement) คือ ประโยคหรือข้อความที่เป็น จริง หรือ เท็จ อย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น

ค่าความจริง (truth value) ของประพจน์มีได้ 2 แบบคือ จริง (True: T) หรือ เท็จ (False: F)

จงพิจารณาว่าประโยคต่อไปนี้นี้เป็นประพจน์หรือไม่ ถ้าเป็นให้หาค่าความจริง

ตัวอย่างประโยค: ฟีญาจบ Cambridge University

คำตอบ: เป็นประพจน์ที่ค่าความจริงเป็นจริง

ตัวอย่างประโยค2: ฟีญาเป็นเคะหรือไม่

คำตอบ: ไม่เป็นประพจน์ เนื่องจากเป็นประโยคคำถาม

ประโยค: $x+5=10$

ไม่เป็นประพจน์ เพราะมีตัวแปร ซึ่งจะไม่ทราบค่า
ความจริงจนกว่าจะแทนค่าลงในตัวแปร

ประโยค: $\pi = 3.14$

เป็นประพจน์ ที่มีค่าความจริงเป็นเท็จ เพราะ π เป็น
จำนวนอตรรกยะ

ประโยค: อย่าเดินลัดสนาม

ไม่เป็นประพจน์ เพราะ เป็นประโยคคำสั่ง

ประโยค: บางคนชอบกาแฟ

เป็นประพจน์ ที่มีค่าความจริงเป็นจริง

ประโยค: $x > 5$ และ $x < 3$

ไม่เป็นประพจน์ เพราะมีตัวแปร ซึ่งจะไม่ทราบค่าความจริงจนกว่าจะแทนค่าลงในตัวแปร

ประโยค: เคมีฟิสิกส์คอร์สละ 290 บาท

เป็นประพจน์ ที่มีค่าความจริงเป็นเท็จ

ประโยค: ว้าว อร่อยจังเลย!

ไม่เป็นประพจน์ เพราะไม่ได้เป็นประโยคบอกเล่าหรือปฏิเสธ

ประโยค: ไม่มีจำนวนเต็มใดที่อยู่ระหว่าง 5 และ 6

เป็นประพจน์ ที่มีค่าความจริงเป็นจริง

ประโยค: กรุงเทพฯ ไม่เป็นเมืองหลวงของประเทศไทย

เป็นประพจน์ ที่มีค่าความจริงเป็นเท็จ

ประโยค: จังหวัดนนทบุรีมีประชากรอยู่ 1,319,999 คน

เป็นประพจน์ แต่ไม่ทราบค่าความจริงแน่ชัด

การเชื่อมประพจน์

ตัวเชื่อมที่เห็นได้บ่อยในบทนี้ ได้แก่ ...และ... , ...หรือ... , ถ้า...แล้ว... , ...ก็ต่อเมื่อ... , ไม่

ตัวเชื่อม “และ” ($\wedge$)

ประพจน์ที่เชื่อมด้วย “และ” จะเป็นจริงเมื่อ ทุกประพจน์ที่มาเชื่อม เป็นจริง

จงพิจารณาหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

ตัวอย่างประโยค: กวางมี 8 ขา และ ประเทศไทยมีชายแดนติดกับประเทศกัมพูชา

พิจารณา กวางมี 8 ขา เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็น เท็จ

ประเทศไทยมีชายแดนติดกับประเทศกัมพูชา เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็น จริง

จากประพจน์ที่เชื่อมด้วย และ จะเป็นจริงเมื่อ ทุกประพจน์ที่มาเชื่อม เป็นจริง ดังนั้นประโยคนี้เป็นเท็จ

ประโยค: แมวเป็นสัตว์เลี้ยงลูกด้วยนม และ ปลาฉลามบินได้

แมวเป็นสัตว์เลี้ยงลูกด้วยนม เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริง

ปลาฉลามบินได้ เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นเท็จ

แมวเป็นสัตว์เลี้ยงลูกด้วยนม และ ปลาฉลามบินได้ $\equiv T \wedge F \equiv F$

ประโยค: กรุงเทพฯ อยู่ในไทย และ เชียงใหม่อยู่ทางเหนือของไทย

กรุงเทพฯ อยู่ในไทย เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริง

เชียงใหม่อยู่ทางเหนือของไทย เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริง

แมวเป็นสัตว์เลี้ยงลูกด้วยนม และ ปลาฉลามบินได้ $\equiv T \wedge T \equiv T$

ประโยค: ฟิสิกส์สอนฟิสิกส์ และ ฟิสิกส์ไม่สอนฟิสิกส์

พิจารณาประโยคทั้ง 2 มีค่าความจริงตรงข้ามกัน

ประพจน์ที่เชื่อมด้วย “และ” จะเป็นจริงเมื่อ ทุกประพจน์ที่มาเชื่อม เป็นจริง

ดังนั้นประโยคนี้มีค่าความจริงเป็นเท็จ

ประโยค: ประเทศไทยมีประชากร 66 ล้านคน และ ประเทศไทยมีประชากร 100 ล้านคน

พิจารณาประโยคทั้ง 2 เป็นประโยคที่บอกสิ่งเดียวกัน ซึ่งมีค่าไม่เท่ากัน

ดังนั้นจะมีพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นเท็จ อย่างน้อย 1 พจน์

ประพจน์ที่เชื่อมด้วย “และ” จะเป็นจริงเมื่อ ทุกประพจน์ที่มาเชื่อม เป็นจริง

ดังนั้นประโยคนี้มีค่าความจริงเป็นเท็จ

ประโยค: ในปี 2077 ประเทศไทยมีคนอายุ 60 ปีเป็นนายก และ $\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} = \frac{22}{7} - \pi$ และ $1+1=3$

พิจารณาประโยค $1+1=3$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

ประพจน์ที่เชื่อมด้วย “และ” จะเป็นจริงเมื่อ ทุกประพจน์ที่มาเชื่อม เป็นจริง

ดังนั้นประโยคที่สนใจมีค่าความจริงเป็นเท็จ

ตัวเชื่อม “หรือ” (V)

ประพจน์ที่เชื่อมด้วย “หรือ” จะเป็นจริงเมื่อมีอย่างน้อยหนึ่งประพจน์ที่มาเชื่อม เป็นจริง

จงพิจารณาหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

ตัวอย่างประโยค: 2 เป็นเลขคี่ หรือ 3 เป็นเลขคี่

พิจารณา 2 เป็นเลขคี่ เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็น เท็จ

3 เป็นเลขคี่ เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็น จริง

ประพจน์ที่เชื่อมด้วย “หรือ” จะเป็นจริงเมื่อมีอย่างน้อยหนึ่งประพจน์ที่มาเชื่อม เป็นจริง ดังนั้นประโยคนี้เป็นจริง

ประโยค: 5 เป็นจำนวนคู่ หรือ 7 เป็นจำนวนเฉพาะ หรือ สี่เหลี่ยมจัตุรัสทุกด้านยาวเท่ากัน

5 เป็นจำนวนคู่ เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็น **เท็จ**

7 เป็นจำนวนเฉพาะ เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็น **จริง**

สี่เหลี่ยมจัตุรัสทุกด้านยาวเท่ากัน เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็น **จริง**

5 เป็นจำนวนคู่ หรือ 7 เป็นจำนวนเฉพาะ หรือ สี่เหลี่ยมจัตุรัสทุกด้านยาวเท่ากัน $\equiv F \vee T \vee T \equiv T$

ประโยค: ประเทศไทยมีพรมแดนติดทะเล หรือ ประเทศไทยเป็นเกาะ

ประเทศไทยมีพรมแดนติดทะเล เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็น **จริง**

ประเทศไทยเป็นเกาะ เป็นประพจน์ที่ไม่ทราบค่าความจริง $\equiv p$

ประพจน์ที่เชื่อมด้วย “หรือ” จะเป็นจริงเมื่อมีอย่างน้อยหนึ่งประพจน์ที่มาเชื่อม

ประเทศไทยมีพรมแดนติดทะเล หรือ ประเทศไทยเป็นเกาะ $\equiv T \vee p \equiv T$

ประโยค: ฟักผาสอนเคมีในอีก 10 ปีข้างหน้า หรือ ฟักผาไม่สอนเคมีในอีก 10 ปีข้างหน้า

พิจารณาประโยคทั้ง 2 เป็นประโยคที่บอกสิ่งเดียวกัน ซึ่งมีค่าไม่เท่ากัน

ดังนั้นจะมีพจน์ที่มีค่าความจริงเป็น**จริง** อย่างน้อย 1 พจน์

ประพจน์ที่เชื่อมด้วย “**หรือ**” จะเป็นจริงเมื่อ ทุกประพจน์ที่มาเชื่อม เป็นจริง

ดังนั้นประโยคนี้มีค่าความจริงเป็นจริง

ประโยค: $(1 + 1 = 3) \vee (2 + 2 = 5) \vee (3 + 3 = 6)$

มีพจน์ที่มีค่าความจริงเป็น**จริง** อย่างน้อย 1 พจน์ คือ $3 + 3 = 6$

ประพจน์ที่เชื่อมด้วย “**หรือ**” จะเป็นจริงเมื่อ ทุกประพจน์ที่มาเชื่อม เป็นจริง

ดังนั้นประโยคนี้มีค่าความจริงเป็นจริง

ประโยค: ทวีปเอเชียมีประเทศมากที่สุด $\vee \int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} = \frac{22}{7} - \pi \vee 1+1=2$

มีพจน์ที่มีค่าความจริงเป็น**จริง** อย่างน้อย 1 พจน์ คือ $1 + 1 = 2$

ประพจน์ที่เชื่อมด้วย “**หรือ**” จะเป็นจริงเมื่อ ทุกประพจน์ที่มาเชื่อม เป็นจริง

ดังนั้นประโยคนี้มีค่าความจริงเป็นจริง

ตัวเชื่อม “ถ้า p แล้ว q ” ($p \rightarrow q$)

ประพจน์ที่เชื่อมด้วย “ถ้า ... แล้ว ...” จะมีความหมายในลักษณะของ ถ้า (เงื่อนไข) แล้ว (ผลลัพธ์)

ถ้าเงื่อนไข เป็นจริง ผลลัพธ์ต้องจริง

แต่ถ้าเงื่อนไขเป็นเท็จ ผลลัพธ์จะเป็นอย่างไรก็ได้

จะเห็นได้ว่า ประพจน์ที่เชื่อมด้วย “ถ้า ... แล้ว ...” จะเป็นเท็จได้เพียงกรณีเดียว คือ เมื่อข้างหน้าเป็นจริง แต่ข้างหลังเป็นเท็จ

และสามารถเปลี่ยนเป็นรูปหรือได้ด้วยประพจน์ที่สมมูลกัน $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

จงพิจารณาหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

ตัวอย่างประโยค: ถ้า ช้างบินได้ แล้ว ฉันได้เกรด 4.00

พิจารณา ช้างบินได้ เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็น เท็จ

ดังนั้นประโยคนี้เป็นจริง

ตัวอย่างประโยค2: ถ้าลูกได้ 4.00 แล้วจะให้รางวัล

ค่าความจริงขึ้นกับเหตุการณ์ที่เกิดขึ้น

สมมติว่าถ้าไม่ได้ 4.00 ประโยคนี้เป็นจริง

ถ้าได้ 4.00 แล้วไม่ให้รางวัล แสดงว่า $(T \rightarrow F)$ ประโยคนี้เป็นเท็จ

ถ้าได้ 4.00 แล้วให้รางวัล แสดงว่า $(T \rightarrow T)$ ประโยคนี้เป็นจริง

ประโยค: ถ้าวันนี้เป็นวันเสาร์ แล้วพรุ่งนี้เป็นวันอาทิตย์

สมมติวันนี้ไม่เป็นวันเสาร์ ประโยคนี้เป็นจริง

ถ้าวันนี้เป็นวันเสาร์เป็นจริง เราทราบว่าพรุ่งนี้เป็นวันอาทิตย์เป็นจริงเช่นกัน

แสดงว่า $(T \rightarrow T)$ ประโยคนี้เป็นจริง

ดังนั้นสรุปได้ว่าประพจน์นี้เป็นความจริง

ประโยค: ถ้า $2 + 2 = 5$ แล้วฉันเป็นพระราชา

$2 + 2 = 5$ เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นเท็จ

ฉันเป็นพระราชา เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นเท็จ

ถ้า $2 + 2 = 5$ แล้วฉันเป็นพระราชา $\equiv F \rightarrow F \equiv T$

ประโยค: “ถ้าเรียน แล้วสอบได้” แม้ไม่เรียน

ให้ สอบได้ เป็นประพจน์ p ใดๆ

“ถ้าเรียน แล้วสอบได้” สามารถพิจารณาในรูปทางตรรกศาสตร์ ได้ว่า $F \rightarrow p \equiv T$

ประโยค: ถ้า $2 < 1$ แล้ว $\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} = \frac{22}{7} - \pi$

พิจารณา $2 < 1$ เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นเท็จ

ให้ $\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} = \frac{22}{7} - \pi$ เป็นประพจน์ p ใดๆ

ถ้า $2 < 1$ แล้ว $\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} = \frac{22}{7} - \pi$ สามารถพิจารณาในรูปทางตรรกศาสตร์ ได้ว่า $F \rightarrow p \equiv T$

ตัวเชื่อม “ p ก็ต่อเมื่อ q ” ($p \leftrightarrow q$)

ประพจน์ที่เชื่อมด้วย “ก็ต่อเมื่อ” จะเป็นจริงเมื่อเป็นจริงหรือเท็จพร้อม ๆ กัน

จงพิจารณาหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

ตัวอย่างประโยค: แม่นยูเป็นแชมป์ ก็ต่อเมื่อ ปลาเดินได้

ประโยคนี้เป็นจริง เพราะ แม่นยูเป็นแชมป์ และ ปลาเดินได้ เป็นเท็จเหมือนกัน

ตัวอย่างประโยค2: วันนี้เป็นวันเสาร์ ก็ต่อเมื่อ พรุ่งนี้เป็นวันอาทิตย์

ประโยคนี้เป็นจริง เพราะ จะเป็นจริง หรือ เท็จ พร้อมกันเสมอ

ถ้าวันนี้เป็นวันเสาร์ พรุ่งนี้เป็นวันอาทิตย์

ถ้าวันนี้ไม่เป็นวันเสาร์ พรุ่งนี้ไม่เป็นวันอาทิตย์

ประโยค: $2 + 2 = 4$ ก็ต่อเมื่อ ฉันเป็นมนุษย์ต่างดาว

$2 + 2 = 4$ เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริง

ฉันเป็นมนุษย์ต่างดาว เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นเท็จ

$2 + 2 = 4$ ก็ต่อเมื่อ ฉันเป็นมนุษย์ต่างดาว $\equiv T \leftrightarrow F \equiv F$

ประโยค: ดวงจันทร์เป็นดาวฤกษ์ ก็ต่อเมื่อ ดวงอาทิตย์เป็นดาวเคราะห์

ดวงจันทร์เป็นดาวฤกษ์ เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นเท็จ

ดวงอาทิตย์เป็นดาวเคราะห์ เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นเท็จ

ดวงจันทร์เป็นดาวฤกษ์ ก็ต่อเมื่อ ดวงอาทิตย์เป็นดาวเคราะห์ $\equiv F \leftrightarrow F \equiv T$

ประโยค: จำนวนเต็มทุกตัวเป็นจำนวนคู่ ก็ต่อเมื่อ จำนวนเต็มทุกตัวเป็นจำนวนคี่

จำนวนเต็มทุกตัวเป็นจำนวนคู่ เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นเท็จ

จำนวนเต็มทุกตัวเป็นจำนวนคี่ เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นเท็จ

จำนวนเต็มทุกตัวเป็นจำนวนคู่ ก็ต่อเมื่อ จำนวนเต็มทุกตัวเป็นจำนวนคี่ $\equiv F \leftrightarrow F \equiv T$

ตัวเชื่อม “ไม่ p ” ($\sim p$)

ประพจน์ ที่เติม ไม่ เข้าไป จะเปลี่ยนจากจริงเป็นเท็จ เท็จเป็นจริง

โดยมี De Morgan's laws ในการกระจาย ไม่ เข้าไปในประพจน์ และ/หรือ

$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

$$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

จงประพจน์ p ต่อไปนี้ อยู่ในรูป $\sim p$

ตัวอย่างประพจน์: แมนยูเป็นแชมป์

$\sim p$: แมนยูไม่เป็นแชมป์

ตัวอย่างประพจน์: ดวงจันทร์เป็นดาวฤกษ์ และ 1 ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ

$\sim p$: ดวงจันทร์ไม่เป็นดาวฤกษ์ หรือ 1 เป็นจำนวนเฉพาะ

ประพจน์: สีเหลืองจัตุรัสเป็นสีเหลืองผืนผ้า

นิเสธคือ สีเหลืองจัตุรัสไม่เป็นสีเหลืองผืนผ้า

ประพจน์: ฝนตกและรถติด

$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

นิเสธคือ ฝนไม่ตก หรือ รถไม่ติด

ประโยค: วันนี้เป็นวันจันทร์หรือวันอังคาร

$$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

นิเสธคือ วันนี้ไม่เป็นวันจันทร์ และ ไม่เป็นวันอังคาร

ประโยค: พี่ภูผาใช้fastwork แล้ว พี่ภูผาชอบพีCK

มองว่า p คือ พี่ภูผาใช้fastwork และ q คือ พี่ภูผาชอบพีCK

$$\text{จาก } p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

$$\text{และ } \sim(\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$$

ดังนั้นนิเสธของประโยคคือ $p \wedge \sim q$ หรือคือ พี่ภูผาใช้fastwork และ พี่ภูผาไม่ชอบพีCK

ประโยค: ฝนตกและร้อน หรือ ฝนตกและหนาว

มองว่า p คือ ฝนตก และ q คือ ร้อน

$$\text{จากโจทย์สามารถเขียนใหม่ได้ว่า } (p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)$$

$$\text{นิเสธของประโยคดังกล่าวคือ } \sim[(p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)] \equiv \sim(p \wedge q) \wedge \sim(p \wedge \sim q)$$

$$\equiv (\sim p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee q)$$

ดังนั้นนิเสธของประโยคคือ ฝนไม่ตกหรือหนาว และ ฝนไม่ตกหรือร้อน

จากการได้ทราบนิยามของการดำเนินการแล้ว จะมาสร้างตารางค่าความจริงของการดำเนินการต่าง ๆ
 ทวนสัญลักษณ์ $\vee$ คือ หรือ, $\wedge$ คือ และ, $p \rightarrow q$ คือ “ถ้า p แล้ว q ”, $p \leftrightarrow q$ คือ “ p ก็ต่อเมื่อ q ”

จงเติม T/F ในตารางค่าความจริง (ทำให้ในตารางมีค่าครบทุกรูปแบบของประพจน์ที่สนใจ)

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

โดยจะเห็นว่า และ หรือ ก็ต่อเมื่อ มีสมบัติการสลับที่ ส่วน ถ้า...แล้ว... ไม่มีสมบัติการสลับที่
 อีกทั้งไม่ต้องทราบครบทุกตัวก็สามารถหาค่าความจริงได้ หรือลดรูปได้

(สามารถสังเกตได้จากตารางค่าความจริง โดยแทนค่าแค่ 1 ตัวแปร แล้วสังเกตความสัมพันธ์) เช่น

$$\begin{aligned} T \vee q &\equiv T \\ F \vee q &\equiv q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T \wedge q &\equiv q \\ F \wedge q &\equiv F \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F \rightarrow q &\equiv T \\ p \rightarrow F &\equiv \sim p \\ T \rightarrow q &\equiv q \\ p \rightarrow T &\equiv T \end{aligned}$$

โดยโจทย์ส่วนใหญ่จะให้หาค่าความจริงของประพจน์ใดๆ ซึ่งเกิดจากการดำเนินการของประพจน์ย่อยๆ ลำดับการดำเนินการทางตรรกศาสตร์

1. วงเล็บ: หากมีเครื่องหมายวงเล็บ ให้ดำเนินการคำนวณหรือพิจารณาค่าในวงเล็บเป็นอันดับแรก
2. นิเสธ (ไม่): ดำเนินการในส่วนของตัวเชื่อม "ไม่" เป็นลำดับถัดมา
3. และ: ดำเนินการตัวเชื่อม "และ"
4. หรือ: ดำเนินการตัวเชื่อม "หรือ"
5. ถ้า...แล้ว...: ดำเนินการตัวเชื่อม "ถ้า...แล้ว..."
6. ก็ต่อเมื่อ: ดำเนินการตัวเชื่อม "ก็ต่อเมื่อ" เป็นลำดับสุดท้าย

จงหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

ตัวอย่าง

กำหนด p มีค่าความจริงเป็น T , q มีค่าความจริงเป็น F จงหาค่าของ $(p \wedge q) \rightarrow p$

$$(p \wedge q) \rightarrow p \equiv (T \wedge F) \rightarrow T \equiv T$$

Note: จาก $p \rightarrow T \equiv T$

1. กำหนด p และ q มีค่าความจริงเป็น F และ F ตามลำดับ จงหาค่าความจริงของ $\sim(p \vee q) \leftrightarrow p$
$$\begin{aligned}\sim(p \vee q) \leftrightarrow p &\equiv \sim(F \vee F) \leftrightarrow F \\ &\equiv \sim F \leftrightarrow F \\ &\equiv T \leftrightarrow F \\ &\equiv F\end{aligned}$$

2. กำหนด p, q และ r มีค่าความจริงเป็น T, T และ F ตามลำดับ

จงหาค่าความจริงของ $\sim(r \vee p \rightarrow \sim q) \leftrightarrow \sim r$

$$\begin{aligned}\sim(r \vee p \rightarrow \sim q) \leftrightarrow \sim r &\equiv \sim(F \vee T \rightarrow \sim T) \leftrightarrow \sim F \\ &\equiv \sim([F \vee T] \rightarrow F) \leftrightarrow T \\ &\equiv \sim(F) \leftrightarrow T \\ &\equiv T \leftrightarrow T \\ &\equiv T\end{aligned}$$

3. จงหาค่าความจริงของ $\sim(T \wedge T \vee F) \leftrightarrow (\sim T \leftrightarrow T \vee \sim F)$

$$\begin{aligned}\sim([T \wedge T] \vee F) \leftrightarrow (\sim T \leftrightarrow [T \vee \sim F]) &\equiv \sim(T \vee F) \leftrightarrow (F \leftrightarrow T) \\ &\equiv \sim T \leftrightarrow F \\ &\equiv F \leftrightarrow F \\ &\equiv T\end{aligned}$$

4. จงหาค่าความจริงของ $\sim(F \rightarrow \sim F) \vee (\sim F \leftrightarrow \sim T)$

$$\begin{aligned}\sim(F \rightarrow \sim F) \vee (\sim F \leftrightarrow \sim T) &\equiv \sim(F \rightarrow T) \vee (T \leftrightarrow F) \\ &\equiv \sim T \vee F \\ &\equiv F \vee F \equiv F\end{aligned}$$

5. จงหาค่าความจริงของ $\sim(p \vee \sim p)$

จากการดำเนินการหรือ จะได้จริง ก็ต่อเมื่อ มีอย่างน้อย 1 พจน์เป็นจริง

พิจารณา พจน์ $p, \sim p$ จะได้ว่าต้องมี 1 พจน์เป็นจริง ดังนั้น $p \vee \sim p \equiv T$

นั่นคือ $\sim(p \vee \sim p) \equiv \sim T \equiv F$

6. กำหนด p มีค่าความจริงเป็น T จงหาค่าความจริงของ $\sim(p \vee \sim q) \rightarrow \sim r$

พิจารณา $T \vee \sim q \equiv T$ สำหรับ q ใดๆ

$\sim T \rightarrow \sim r \equiv F \rightarrow \sim r \equiv T$ สำหรับ r ใดๆ

ดังนั้นได้ว่า $\sim(p \vee \sim q) \rightarrow \sim r \equiv T$ เมื่อ p มีค่าความจริงเป็น T

7. กำหนด p มีค่าความจริงเป็น T จงหาค่าความจริงของ $\sim(\sim p \vee q) \leftrightarrow \sim(p \rightarrow \sim q)$

$$\begin{aligned}\sim(\sim T \vee q) &\leftrightarrow \sim(T \rightarrow \sim q) \equiv \sim(F \vee q) \leftrightarrow \sim(T \rightarrow \sim q) \\ &\equiv (F \vee q) \leftrightarrow (T \rightarrow \sim q)\end{aligned}$$

พิจารณา $F \vee q \equiv q$ สำหรับ q ใดๆ

$$T \rightarrow \sim q \equiv \sim q$$

$$(F \vee q) \leftrightarrow (T \rightarrow \sim q) \equiv q \leftrightarrow \sim q \equiv F$$

8. กำหนด p มีค่าความจริงเป็น T

จงหาค่าความจริงของ $\sim(\sim p \vee q) \rightarrow (\sim(q \wedge \sim q) \rightarrow \sim q)$

พิจารณา $q \wedge \sim q \equiv F$

$$\begin{aligned}\sim(\sim T \vee q) \rightarrow (\sim F \rightarrow \sim q) &\equiv \sim(F \vee q) \rightarrow (T \rightarrow \sim q) \\ &\equiv \sim q \rightarrow (\sim q) \\ &\equiv \sim q \rightarrow \sim q \\ &\equiv T\end{aligned}$$

9. กำหนด p มีค่าความจริงเป็น T จงหาค่าความจริงของ $\sim((\sim p \wedge \sim r) \rightarrow (q \rightarrow (p \vee s)))$

พิจารณา $F \wedge \sim r \equiv F$ และ $F \rightarrow (q \rightarrow (p \vee s)) \equiv T$

$$\begin{aligned}\sim((\sim T \wedge \sim r) \rightarrow (q \rightarrow (p \vee s))) &\equiv \sim((F \wedge \sim r) \rightarrow (q \rightarrow (p \vee s))) \\ &\equiv \sim(F \rightarrow (q \rightarrow (p \vee s))) \\ &\equiv \sim T \equiv F\end{aligned}$$

10. จงหาค่าความจริงของ $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow s)] \rightarrow (p \rightarrow s)$

สมมติให้ $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow s)]$ เป็นเท็จ จะได้ว่า

$$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow s)] \rightarrow (p \rightarrow s) \equiv T$$

สมมติให้ $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow s)]$ เป็นจริง จะพิจารณา $(p \rightarrow s)$ ว่าเป็นเท็จได้หรือไม่

จาก $p \rightarrow q$ เป็นจริง: ถ้า p เกิด แล้ว q ต้องเกิด

จาก $q \rightarrow r$ เป็นจริง: ถ้า q เกิด แล้ว r ต้องเกิด

จาก $r \rightarrow s$ เป็นจริง: ถ้า r เกิด แล้ว s ต้องเกิด

หากเริ่มที่ p จะส่งทอดผลต่อไปเป็นทอดๆ สุดท้ายจึงสรุปได้ว่า $p \rightarrow s$ เป็นจริงเสมอ

$$\text{นั่นคือ } [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow s)] \rightarrow (p \rightarrow s) \equiv T$$

ตัวอย่าง 2 กำหนดค่าความจริงของการดำเนินการมาให้ แล้วหาค่าความจริงของประพจน์ย่อย ๆ

ให้ $[p \rightarrow q] \rightarrow (p \rightarrow r) \equiv F$ หาค่าความจริงของประพจน์ p, q และ r

พิจารณา $a \rightarrow b \equiv F$ เป็นไปได้กรณีเดียวคือ $a \equiv T$ และ $b \equiv F$

$[p \rightarrow q] \rightarrow (p \rightarrow r) \equiv F$ ได้ว่า $p \rightarrow q \equiv T$ และ $p \rightarrow r \equiv F$

พิจารณาทางเลือกที่ง่ายที่สุด หรือ 1 กรณีให้คิด

$p \rightarrow r \equiv F$ จะได้ว่า $p \equiv T$ และ $r \equiv F$

แทน $p \equiv T$ ใน $p \rightarrow q \equiv T$ ได้ว่า $q \equiv T$

11. ให้ $(p \wedge q) \wedge (r \wedge s) \equiv T$ หาค่าความจริงของประพจน์ p, q, r และ s

$(p \wedge q) \wedge (r \wedge s) \equiv p \wedge q \wedge r \wedge s$

จากประพจน์ที่เชื่อมด้วยและเป็นจริง จะได้ว่าทุกพจน์ย่อยมีค่าความจริงเป็นจริง

12. ให้ $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee r) \equiv F$ หาค่าความจริงของประพจน์ p, q และ r

พิจารณา $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee r) \equiv F$ เป็นไปได้กรณีเดียวคือ $(p \wedge q) \equiv T$ และ $(p \vee r) \equiv F$

จาก $(p \wedge q) \equiv T$ ได้ว่า $p \equiv T$ และ $q \equiv T$

พิจารณา $(p \vee r) \equiv T \vee r \equiv F$ ได้ว่า ไม่มีคำตอบที่สอดคล้อง

13. ให้ $(p \rightarrow (p \rightarrow r)) \vee (r \leftrightarrow \sim q) \equiv F$ หาค่าความจริงของประพจน์ p, q และ r

พิจารณา $(p \rightarrow (p \rightarrow r)) \vee (r \leftrightarrow \sim q) \equiv F$ เป็นไปได้กรณีเดียวคือ $(p \rightarrow (p \rightarrow r)) \equiv F$ และ $(r \leftrightarrow \sim q) \equiv F$

จาก $(p \rightarrow (p \rightarrow r)) \equiv F$ ได้ว่า $p \equiv T$ และ $(p \rightarrow r) \equiv F$ หาได้ว่า $r \equiv F$

พิจารณา $(r \leftrightarrow \sim q) \equiv (F \leftrightarrow \sim q) \equiv F$ ได้ว่า $\sim q \equiv T$ ดังนั้น $q \equiv F$

14. ให้ $(p \wedge q) \leftrightarrow p \equiv F$ หาค่าความจริงของประพจน์ p, q

พิจารณาเป็น 2 กรณีย่อย คือ $p \equiv F$ และ $p \equiv T$

เมื่อ $p \equiv F$ จะได้ว่า $(p \wedge q) \equiv T$ ด้วยเช่นกัน จะได้ว่าไม่มี q ที่ทำให้เป็นจริง

เมื่อ $p \equiv T$ จะได้ว่า $(p \wedge q) \equiv F$ ด้วยเช่นกัน จะได้ว่ามี $q \equiv F$ ที่ทำให้เป็นจริง

สรุปคำตอบ $p \equiv T$ และ $q \equiv F$

15. ให้ $(p \rightarrow q) \wedge (r \wedge \sim q) \equiv T$ หาค่าความจริงของประพจน์ $(q \leftrightarrow r) \vee (\sim q \rightarrow p)$

พิจารณา $(p \rightarrow q) \wedge (r \wedge \sim q) \equiv T$ ได้ว่า $p \rightarrow q \equiv T$ และ $r \wedge \sim q \equiv T$

จาก $r \wedge \sim q \equiv T$ ได้ว่า $r \equiv T$ และ $\sim q \equiv T$

พิจารณาพจน์ที่เหลือ $p \rightarrow q \equiv T$ โดยการแทนค่า q ได้ว่า $p \equiv F$

สรุป $p \equiv F$ และ $q \equiv F$

$(q \leftrightarrow r) \vee (\sim q \rightarrow p) \equiv (F \leftrightarrow F) \vee (\sim F \rightarrow F) \equiv T \vee F \equiv T$

การสร้างตารางค่าความจริง

สามารถใช้ตารางค่าความจริง เพื่อวิเคราะห์ค่าความจริงของประพจน์ว่าเป็นจริงหรือเท็จในแต่ละกรณีได้ โดยปกติจะสมมติค่าความจริงของทุกกรณีที่เป็นไปได้ โดยมีประพจน์ย่อย n ประพจน์ ซึ่งมีจำนวนกรณีเท่ากับ 2^n

ตัวอย่าง

จงพิจารณาว่าประพจน์ $(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$ เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่ [นิยามสัจนิรันดร์ คือเป็นจริงเสมอๆ]
หนึ่งในวิธีที่สามารถทำได้คือหาทุกกรณีที่เป็นไปได้ หรือสร้างตารางค่าความจริง

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$	$(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$
T	T	T	T	T
T	F	T	T	T
F	T	T	T	T
F	F	F	F	T

จงสร้างตารางค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

1. $(p \vee q) \leftrightarrow (p \wedge q)$

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$(p \vee q) \leftrightarrow (p \wedge q)$
T	T	T	T	T
T	F	T	F	F
F	T	T	F	F
F	F	F	F	T

2. $(p \leftrightarrow \sim q) \rightarrow (q \rightarrow (p \leftrightarrow \sim q))$

p	q	$p \leftrightarrow \sim q$	$q \rightarrow (p \leftrightarrow \sim q)$	$(p \leftrightarrow \sim q) \rightarrow (q \rightarrow (p \leftrightarrow \sim q))$
T	T	F	F	T
T	F	T	T	T
F	T	T	T	T
F	F	F	T	T

3. $(p \vee q \wedge r) \leftrightarrow (p)$

ลำดับดำเนินการคือ $(p \vee [q \wedge r]) \leftrightarrow (p)$

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee [q \wedge r]$	$(p \vee [q \wedge r]) \leftrightarrow (p)$
T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T
T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	T	T
F	T	T	T	T	F
F	T	F	F	F	T
F	F	T	F	F	T
F	F	F	F	F	T

4. $\sim(p \leftrightarrow q) \rightarrow (\sim q \rightarrow r)$

p	q	r	$\sim(p \leftrightarrow q)$	$\sim q \rightarrow r$	$\sim(p \leftrightarrow q) \rightarrow (\sim q \rightarrow r)$
T	T	T	F	T	T
T	T	F	F	T	T
T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T
F	F	T	F	T	T
F	F	F	F	F	T

รูปแบบของประพจน์ที่สมมูลกัน

ถ้าสร้างตารางค่าความจริงแล้วพบว่าประพจน์สองรูปแบบที่มีค่าความจริงตรงกันทุกกรณี จะสรุปได้ว่าประพจน์เหมือนกัน โดยสามารถหาได้จาก

- สร้างตารางค่าความจริง
- ใช้รูปแบบของประพจน์ที่สมมูลกัน

โดยการนำรูปแบบของประพจน์ที่สมมูลกัน จะจัดรูปจากประพจน์ที่เราทราบว่าสมมูลกัน

ตัวอย่างประพจน์ที่ควรทราบ

สมบัติการสลับที่	$\sim(\sim p) \equiv p$
$p \vee q \equiv q \vee p$	สมมูลของ ถ้า...แล้ว....
$p \wedge q \equiv q \wedge p$	$p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p \equiv \sim p \vee q$
$p \leftrightarrow q \equiv q \leftrightarrow p$	
การกระจาย	กระจายนิเสธ
$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$\sim(p \vee q) \equiv \sim q \wedge \sim p$
$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\sim(p \wedge q) \equiv \sim q \vee \sim p$
	$\sim(p \leftrightarrow q) \equiv \sim p \leftrightarrow q \equiv p \leftrightarrow \sim q$

พิจารณาว่าประพจน์ต่อไปนี้สมมูลกันหรือไม่

ตัวอย่าง

$p \rightarrow (q \wedge r)$ กับ $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$

พิจารณา RHS: $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee r) \equiv \sim p \vee (q \wedge r)$
 $\equiv p \rightarrow (q \wedge r)$

จาก RHS=LHS ได้ว่า $p \rightarrow (q \wedge r)$ กับ $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$ สมมูลกัน

$$1. p \leftrightarrow q \text{ กับ } (\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$$

$$\text{ใช้สมบัติ } p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

$$\begin{aligned} \text{จากสมบัติ } p \leftrightarrow q &\equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p) \\ &\equiv (\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q) \end{aligned}$$

ดังนั้น $p \leftrightarrow q$ กับ $(\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$ สมมูลกัน

$$2. p \rightarrow (q \vee r) \text{ กับ } (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$$

$$\text{ใช้สมบัติ } p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

$$\text{สมบัติ } p \vee q \equiv (p \vee p) \vee q$$

$$\text{และการเปลี่ยนกลุ่ม } (p \vee q) \vee r = p \vee q \vee r$$

$$\begin{aligned} p \rightarrow (q \vee r) &\equiv \sim p \vee (q \vee r) \equiv \sim p \vee (q \vee r) \vee \sim p \\ &\equiv (\sim p \vee q) \vee (\sim p \vee r) \equiv (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \end{aligned}$$

ดังนั้น $p \rightarrow (q \vee r)$ กับ $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$ สมมูลกัน

$$3. p \rightarrow (q \rightarrow r) \text{ กับ } (p \rightarrow q) \rightarrow r$$

$$\text{ใช้สมบัติ } p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

$$\text{และการเปลี่ยนกลุ่ม } (p \vee q) \vee r \equiv p \vee q \vee r$$

$$\begin{aligned} p \rightarrow (q \rightarrow r) &\equiv \sim p \vee (\sim q \vee r) \equiv (\sim p \vee \sim q) \vee r \\ (p \rightarrow q) \rightarrow r &\equiv \sim(\sim p \vee q) \vee r \equiv (p \wedge \sim q) \vee r \end{aligned}$$

เห็นได้ชัดว่า $(\sim p \vee \sim q) \vee r$ ไม่สมมูลกับ $(p \wedge \sim q) \vee r$

ดังนั้น $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ กับ $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ ไม่สมมูลกัน

4. $(p \wedge \sim q) \vee q$ กับ $\sim p \rightarrow q$

$$(p \wedge \sim q) \vee q \equiv (p \vee q) \wedge (\sim q \vee q) \equiv (p \vee q) \wedge T \equiv p \vee q$$

$$\sim p \rightarrow q \equiv \sim(\sim p) \vee q \equiv p \vee q$$

ดังนั้น $(p \wedge \sim q) \vee q$ กับ $\sim p \rightarrow q$ สมมูลกัน

5. $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)$ กับ $p \wedge q$

มองการกระจาย $(p \vee \sim p) \wedge q \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge q)$

$$(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q) \equiv [(p \vee \sim p) \wedge q] \vee (p \wedge \sim q)$$

$$\equiv [(p \vee \sim p) \wedge q] \vee (p \wedge \sim q) \equiv q \vee (p \wedge \sim q) \equiv (q \vee p) \wedge (q \vee \sim q)$$

$$\equiv p \wedge q$$

ดังนั้น $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)$ กับ $p \wedge q$ สมมูลกัน

6. $[(p \wedge q) \rightarrow r] \rightarrow [(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)]$ กับ T

$$[(p \wedge q) \rightarrow r] \rightarrow [(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)]$$

$$\equiv [\sim(p \wedge q) \vee r] \rightarrow [(\sim p \vee r) \vee (\sim q \vee r)]$$

$$\equiv [\sim p \vee \sim q \vee r] \rightarrow [\sim p \vee \sim q \vee r \vee r]$$

$$\equiv [\sim p \vee \sim q \vee r] \rightarrow [\sim p \vee \sim q \vee r]$$

$$\equiv T$$

สัจนิรันดร์

สัจนิรันดร์ คือ รูปแบบของประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริงทุกกรณี

โดยสามารถตรวจสอบได้โดย

- สร้างตารางค่าความจริง
- หาข้อขัดแย้ง

อีกทั้งสามารถพิจารณาประพจน์ให้อยู่ในรูปอย่างง่ายก่อนได้

ตัวอย่าง

ตรวจสอบว่า $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$ เป็นสัจนิรันดร์

สร้างตารางค่าความจริง

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge p$	$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

จากทุกกรณีของ $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$ ได้ T ดังนั้นเป็นสัจนิรันดร์

หาข้อขัดแย้ง

ต้องการพิจารณาว่าเป็นจริงเสมอ ดังนั้นจะหาว่ามีกรณีไหนที่คำตอบได้เท็จ

หาคำตอบของ $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q \equiv F$

จาก $a \rightarrow b \equiv F$ ได้ว่า $(a \equiv T) \wedge (b \equiv F)$ ดังนั้น $[(p \rightarrow q) \wedge p] \equiv T) \wedge (q \equiv F)$

แทน $q \equiv F$ ลงใน $[(p \rightarrow q) \wedge p] \equiv T$ ได้ว่า

$[(p \rightarrow q) \wedge p] \equiv [(p \rightarrow F) \wedge p] \equiv \sim p \wedge p \equiv F$ เสมอ

ซึ่งขัดแย้งกับที่เราสนใจว่าจะมีกรณีที่ $[(p \rightarrow q) \wedge p] \equiv T) \wedge (q \equiv F)$

จึงได้ว่า $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$ เป็นสัจนิรันดร์

จงตรวจสอบประพจน์ต่อไปนี้ว่าเป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

โดยตรวจสอบทั้งสร้างตารางค่าความจริง และ หาข้อขัดแย้ง

1. $[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$

สร้างตารางค่าความจริง

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge \sim q$	$[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$
T	T	T	F	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

จากการสร้างตารางค่าความจริง ได้ว่า $[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$ เป็นสัจนิรันดร์

หาข้อขัดแย้ง

หากรณีที่ทำให้ $[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p \equiv F$

จากการเชื่อมด้วยถ้า...แล้ว.... ได้ว่า $[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \equiv T$ และ $\sim p \equiv F$

จาก $\sim p \equiv F$ สรุปได้ว่า $p \equiv T$ แทนค่า p ในพจน์ที่ไม่ทราบ

จาก $[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \equiv T$ ได้ว่า $p \rightarrow q \equiv T$ และ $\sim q \equiv T$

จาก $\sim q \equiv T$ สรุปได้ว่า $q \equiv F$ แทนค่า q ในพจน์ที่ไม่ทราบ

พิจารณาพจน์ที่เหลือ $p \rightarrow q \equiv T$ ได้ว่าไม่เป็นจริง เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$ เป็นสัจนิรันดร์

$$2. (p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$$

สร้างตารางค่าความจริง

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim q \rightarrow \sim p$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

จากการสร้างตารางค่าความจริง ได้ว่า $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$ เป็นสัจนิรันดร์

หาข้อขัดแย้ง

หากรณีที่ทำให้ $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p) \equiv F$

จากการเชื่อมด้วยก็ต่อเมื่อ พิจารณากรณีย่อย

กรณี $p \rightarrow q \equiv T, \sim q \rightarrow \sim p \equiv F$

จาก $\sim q \rightarrow \sim p \equiv F$ ได้ว่า $\sim q \equiv T$ และ $\sim p \equiv F$

ได้ว่า $q \equiv F$ และ $p \equiv T$ และแทนในพจน์ที่ไม่ทราบ $p \rightarrow q \equiv F$ เกิดข้อขัดแย้ง

กรณี $p \rightarrow q \equiv F, \sim q \rightarrow \sim p \equiv T$

จาก $p \rightarrow q \equiv F$ ได้ว่า $p \equiv T$ และ $q \equiv F$ แทนในพจน์ที่ไม่ทราบ

$\sim q \rightarrow \sim p \equiv F$ เกิดข้อขัดแย้ง

สามารถสรุปได้ว่า $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$ เป็นสัจนิรันดร์

Exclusive ก็ต่อเมื่อ

สามารถพิจารณาว่า $(p \rightarrow q) \equiv (\sim q \rightarrow \sim p)$ หรือไม่ ถ้าสมมูลกันจะได้ว่าเป็นสัจนิรันดร์

จากสมบัติถ้าแล้ว $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$

สามารถสรุปได้ว่า $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$ เป็นสัจนิรันดร์

3. $r \rightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (\sim p \rightarrow r)]$

สร้างตารางค่าความจริง

p	q	r	$p \rightarrow q$	$\sim p \rightarrow r$	$(p \rightarrow q) \wedge (\sim p \rightarrow r)$	$r \rightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (\sim p \rightarrow r)]$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	F	F
T	F	F	F	T	F	T
F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T
F	F	F	T	F	F	T

จากการสร้างตารางค่าความจริง ได้ว่า $r \rightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (\sim p \rightarrow r)]$ ไม่เป็นสัจนิรันดร์

หาข้อขัดแย้ง

หากรณีที่ทำให้ $r \rightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (\sim p \rightarrow r)] \equiv F$

จากการเชื่อมด้วยถ้า...แล้ว.... ได้ว่า $r \equiv T$ และ $(p \rightarrow q) \wedge (\sim p \rightarrow r) \equiv F$

จาก $X \rightarrow r \equiv T$ ดังนั้น $(p \rightarrow q) \wedge (\sim p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow q \equiv F$

จากการเชื่อมด้วยถ้า...แล้ว.... ได้ว่า $p \equiv T$ และ $q \equiv F$

ได้ว่า $r \rightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (\sim p \rightarrow r)]$ ไม่เป็นสัจนิรันดร์

การอ้างเหตุผล

ประกอบด้วย เหตุ (p_i) และ ผล (C)

การอ้างเหตุผล สามารถอธิบายได้ว่าถ้าเกิดเหตุที่สนใจทั้งหมด ($p_1, p_2, \dots$) แล้วจะได้ผล (C)

โดยสามารถอธิบายด้วยรูปตรรกศาสตร์ได้ว่า $(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow C$

และจะสมเหตุสมผลก็ต่อเมื่อ $(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow C \equiv T$ หรือเป็นสัจนิรันดร์

ตัวอย่าง

กำหนดให้เหตุ

- $\sim p$
- $r \rightarrow p$
- $q \vee r$

จงหาว่าผลคือ $p \vee r$ สมเหตุสมผลหรือไม่

ถ้าสมเหตุสมผล จะได้ว่า $(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow C \equiv T$

ถ้าจะพิจารณาว่าไม่สมเหตุสมผลคือจะหากรณีที่ทำให้ $(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow C \equiv F$

หรือก็คือ กรณีที่ทุก $p_i \equiv T$ และ $C \equiv F$

พิจารณาเหตุแต่ละพจน์

$\sim p \equiv T$ ได้ว่า $p \equiv F$

$r \rightarrow p \equiv T$ ได้ว่า $r \equiv F$

$q \vee r \equiv T$ ได้ว่า $q \equiv T$

พิจารณาค่าของ $C \equiv p \vee r \equiv F \vee F \equiv F$ ดังนั้น $p \vee r$ ไม่สมเหตุสมผล

จงหาว่าเหตุต่อไปนี้สมเหตุสมผลหรือไม่

1. กำหนดให้เหตุ

- $p \rightarrow q$

- $\sim p$

จงหาว่าผลคือ q สมเหตุสมผลหรือไม่

จากโจทย์ $\sim p \equiv T$ ได้ว่า $p \equiv T$ แทนในพจน์ที่เหลือ

จากโจทย์ $p \rightarrow q \equiv T$ และ $p \equiv T$ ได้ว่า $q \equiv T$

ดังนั้น ผลคือ q สมเหตุสมผล

2. กำหนดให้เหตุ

- $\sim(q \wedge r) \rightarrow (\sim p)$

- $(r \rightarrow p) \wedge \sim s$

- $(s \rightarrow q) \wedge \sim r$

จงหาว่าผลคือ $\sim r$ สมเหตุสมผลหรือไม่

จากโจทย์ $(r \rightarrow p) \wedge \sim s \equiv T$ ได้ว่า $r \rightarrow p \equiv T$ และ $\sim s \equiv T$

จาก $\sim s \equiv T$ ได้ว่า $s \equiv F$

จากโจทย์ $(s \rightarrow q) \wedge \sim r \equiv T$ ได้ว่า $s \rightarrow q \equiv T$ และ $\sim r \equiv T$

จาก $\sim r \equiv T$ ได้ว่า $r \equiv F$

พิจารณาพจน์ $r \rightarrow p \equiv T$ และ $s \rightarrow q \equiv T$ ได้ว่าเป็นจริงเสมอ

จากโจทย์ $\sim(q \wedge r) \rightarrow (\sim p) \equiv \sim(q \wedge F) \rightarrow (\sim p) \equiv T \rightarrow (\sim p) \equiv \sim p$

เห็นได้ว่าพจน์ r ที่สนใจไม่เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น ผลคือ $\sim r$ สมเหตุสมผล

3. เหตุ:

- ถ้าไม่มีใครไปดูหนัง แล้วโรงหนังจะขาดทุน
- ถ้าโรงหนังไม่ขาดทุน แล้วพนักงานจะมีโบนัส
- พนักงานไม่มีโบนัส

ผล: มีคนไปดูหนัง สมเหตุสมผลหรือไม่

นิยามประพจน์ p คือมีคนไปดูหนัง, q คือโรงหนังจะขาดทุน และ r คือพนักงานไม่มีโบนัส

จากโจทย์ $r \equiv T$, $\sim q \rightarrow \sim r \equiv T$, $\sim p \rightarrow q \equiv T$ ต้องการหา p

ทราบพจน์ $r \equiv T$ พิจารณาพจน์ $\sim q \rightarrow \sim r \equiv T$ เห็นว่าเป็นจริงเสมอใน $r \equiv T$

พิจารณาพจน์สุดท้ายที่เหลือ $\sim p \rightarrow q \equiv T$ ได้ว่า p ไม่สามารถสรุปได้

ดังนั้น มีคนไปดูหนัง ไม่สมเหตุสมผล

4. เหตุ:

- ไม่มีนักการเมืองคนใดที่เป็นคนซื่อสัตย์
- คนที่ซื่อสัตย์บางคนเป็นคนจน

ผล: คนจนบางคนไม่ใช่นักการเมือง สมเหตุสมผลหรือไม่

นิยามประพจน์ P คือเซตของนักการเมือง, Q คือเซตของคนที่ซื่อสัตย์ และ R คือเซตของคนจน

ต้องการพิจารณาว่า $R \cap P^c$ มีสมาชิกหรือไม่

จากโจทย์ คนที่ซื่อสัตย์บางคนเป็นคนจน ได้ว่าเซต R และ Q มีส่วนซ้อนทับกัน

ให้มีสมาชิกใน $R \cap Q$

จากโจทย์ ไม่มีนักการเมืองคนใดที่เป็นคนซื่อสัตย์ ได้ว่าเซต P และ Q ไม่ซ้อนทับกัน

สมาชิกใน $R \cap Q$ จะเป็นสมาชิกใน $R \cap Q \cap P^c$ ด้วย ซึ่ง $R \cap Q \cap P^c \subseteq R \cap P^c$

ดังนั้น คนจนบางคนไม่ใช่นักการเมือง สมเหตุสมผล

ประโยคเปิดและตัวบ่งปริมาณ

ประโยคเปิด คือ ประโยคบอกเล่าหรือปฏิเสธที่มีตัวแปร ซึ่งจะไม่ทราบค่าความจริงจนกว่าจะแทนค่าลงในตัวแปร

เช่น ประโยคเปิด : $x = 67$

แทน x ด้วย 67 จะได้ $67 = 67$ ซึ่งเป็นจริง

แทน x ด้วย 69 จะได้ $69 \neq 67$ ซึ่งเป็นเท็จ

โดยส่วนมากจะเขียนแทนประโยคเปิดด้วย $P(x), Q(x)$

ตัวบ่งปริมาณ

ในทางตรรกศาสตร์ มี 2 ตัว คือ

$\forall$ (for all) และ $\exists$ (for some)

$\forall x$ หมายถึง สำหรับ x ทุกตัว

$\exists x$ หมายถึง สำหรับ x บางตัว

ประโยคเปิดที่มีตัวบ่งปริมาณ

คือ ข้อความที่ประกอบด้วยตัวบ่งปริมาณและประโยคเปิด ซึ่งจะกำหนดเอกภพสัมพัทธ์เอาไว้

ข้อความสามารถเขียนให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์ได้ เช่น

ตัวอย่างประโยค: สำหรับ x ทุกตัว $x \cdot 1 = x$ เมื่อเอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนนับ

สามารถเขียนได้ว่า $\forall x \in \mathbb{N}[x \cdot 1 = x]$

ตัวอย่างประโยค2: สำหรับ x ทุกตัว จะมี y ที่ทำให้ $x + y = 5$ เมื่อเอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนนับ

สามารถเขียนได้ว่า $\forall x \exists y[x + y = 5], x, y \in \mathbb{N}$

จงอธิบายประโยคเปิดที่มีตัวบ่งปริมาณต่อไปนี้

กำหนดประโยคเปิด $P(x)$ แทนข้อความ $x + 1 > 2$ และ $Q(x)$ แทนข้อความ $|x| = x$

1. $\forall x \in \mathbb{N}[P(x)]$

ทุก x ที่เป็นจำนวนนับ ทำให้ $x + 1 > 2$

2. $\exists x \in \mathbb{N}[\sim Q(x)]$

ทุก x ที่เป็นจำนวนนับ ทำให้ $x + 1 > 2$

3. $\exists x \in \mathbb{N}[P(x) \wedge Q(x)]$

มี x ที่เป็นจำนวนนับ ที่ทำให้ $x + 1 > 2$ และ $|x| = x$

ค่าความจริงของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณ

กำหนดให้ $P(x)$ เป็นประโยคเปิด และ U เป็นเอกภพสัมพัทธ์ จะได้ว่า

	มีค่าความจริงเป็นจริง ก็ต่อเมื่อ	มีค่าความจริงเป็นเท็จ ก็ต่อเมื่อ
$\forall x[P(x)]$	แทนทุก $x \in U$ ใน $P(x)$ แล้วได้ประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริงทั้งหมด	แทนทุก $x \in U$ ใน $P(x)$ แล้วพบว่าไม่มี x ที่ทำให้ $P(x)$ เป็นเท็จ
$\exists x[P(x)]$	แทน $x \in U$ ใน $P(x)$ แล้วพบว่าไม่มี x ที่ทำให้ $P(x)$ เป็นจริง	แทน $x \in U$ ใน $P(x)$ แล้วพบว่าไม่มี x ที่ทำให้ $P(x)$ เป็นจริง

สรุป $\forall x$ พยายามหา x ไปแทนแล้วเป็นเท็จ $\exists x$ พยายามหา x ไปแทนแล้วเป็นจริง

ตัวอย่าง

กำหนดเอกภพสัมพัทธ์ $U = \{-1, 0, 1\}$ จงหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

$$\forall x[x > -2]$$

พิจารณา $x = -1$ ได้ว่า ประพจน์เป็นจริง

พิจารณา $x = 0$ ได้ว่า ประพจน์เป็นจริง

พิจารณา $x = 1$ ได้ว่า ประพจน์เป็นจริง

ดังนั้น $\forall x[x > -2]$ เป็นจริงสำหรับ $U = \{-1, 0, 1\}$

หาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

$$1. \forall x \in \mathbb{N}[x + 1 > 2]$$

จัดรูปประพจน์ที่สนใจ จาก $x + 1 > 2$ ได้ว่า $x > 1$

จาก $x \in \mathbb{N}$ นั่นคือ $x \in \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

เห็นได้ชัดว่า $x = 1$ ทำให้ประพจน์เป็นเท็จ

ดังนั้นประพจน์นี้มีค่าความจริงเป็นเท็จ

$$2. \quad \exists x \in \mathbb{R}[x \neq 0] \leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}[x^2 = 0]$$

พิจารณาพจน์ $\exists x \in \mathbb{R}[x \neq 0]$ เห็นได้ชัดว่ามี x ที่ทำให้ค่าไม่เท่ากับ 0

พิจารณาพจน์ $\exists x \in \mathbb{R}[x^2 = 0]$ เห็นได้ชัดว่ามี $x = 0$ ที่ทำให้ค่าเป็นจริง

$$\exists x \in \mathbb{R}[x \neq 0] \leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}[x^2 = 0] \equiv T \leftrightarrow T \equiv T$$

$$3. \quad \forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}[x + y = 5]$$

พิจารณาว่าทุก $x \in \mathbb{R}$ จะมี y ที่ทำให้ $x + y = 5$ เป็นจริงหรือไม่

เห็นได้ว่าทุก x สามารถใช้ได้

จัดรูป $x + y = 5$ หาค่า y ในรูปทั่วไปได้ว่ามี $y = 5 - x \in \mathbb{R}$

จะได้ว่าประพจน์ $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}[x + y = 5]$ มีค่าความจริงเป็นจริง

$$4. \quad \exists x \in \mathbb{N}[(x = 0) \wedge (x < -1)]$$

พิจารณา $x = 0$ เนื่องจากมีเพียงตัวเลือกเดียวที่ทำให้ $x = 0$ เป็นจริง

$$\text{จะได้ว่า } (x = 0) \wedge (x < -1) \equiv T \wedge F \equiv F$$

$$\text{เลือก } x \text{ ใด ๆ จะได้ว่า } (x = 0) \wedge (x < -1) \equiv F \wedge X \equiv F$$

ดังนั้นสามารถสรุปได้ว่าประพจน์นี้มีค่าความจริงเป็นเท็จ

สมมูลและนิเสธของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณ

สมมูล

$$\forall x[P(x)] \equiv \forall x[Q(x)] \text{ ก็ต่อเมื่อ } P(x) \equiv Q(x)$$

$$\exists x[P(x)] \equiv \exists x[Q(x)] \text{ ก็ต่อเมื่อ } P(x) \equiv Q(x)$$

นิเสธ

$$\sim \forall x[P(x)] \equiv \exists x[\sim P(x)]$$

$$\sim \exists x[P(x)] \equiv \forall x[\sim P(x)]$$

จงหานิเสธของประพจน์ต่อไปนี้

ตัวอย่าง

$$\text{ประพจน์: } \forall x[x^2 = 0]$$

$$\text{นิเสธของประพจน์คือ } \sim \forall x[x^2 = 0] \equiv \exists x[\sim(x^2 = 0)] \equiv \exists x[x^2 \neq 0]$$

1. ประพจน์: คนไทยทุกคนรักประเทศไทย

เดิมนิเสธไปในตัวบ่งปริมาณ และประโยค

นิเสธคือ: คนไทยบางคน ไม่รักประเทศไทย

2. ประพจน์: $\exists x[(x^2 + 1 > 0) \wedge (x < -1)]$

เดิมนิเสธไปในตัวบ่งปริมาณ และประโยค

$$\text{นิเสธคือ } \sim \exists x[\sim[(x^2 + 1 > 0) \wedge (x < -1)]] \equiv \forall x[(x^2 + 1 \leq 0) \vee (x \geq -1)]$$

3. ประพจน์: $\exists x[x = 1] \leftrightarrow \exists y[y < 2]$

นิเสธคือ $\sim(\exists x[x = 1] \leftrightarrow \exists y[y < 2]) \equiv \sim(\exists x[x = 1]) \leftrightarrow \exists y[y < 2]$
 $\equiv \sim\exists x[\sim(x = 1)] \leftrightarrow \exists y[y < 2]$
 $\equiv \forall x[x \neq 1] \leftrightarrow \exists y[y < 2]$

4. ประพจน์: $\forall x\exists y[x + y \leq 0]$

นิเสธคือ $\sim(\forall x\exists y[x + y \leq 0]) \equiv \sim\forall x\exists y[\sim(x + y \leq 0)]$
 $\equiv \exists x\forall y[x + y > 0]$

5. ประพจน์: $\exists x[x < 7] \rightarrow \forall x\exists y[xy = 0]$

จัดรูปประพจน์ $\exists x[x < 7] \rightarrow \forall x\exists y[xy = 0] \equiv \sim(\exists x[x < 7]) \vee (\forall x\exists y[xy = 0])$
นิเสธคือ $\sim[\sim(\exists x[x < 7]) \vee (\forall x\exists y[xy = 0])]$
 $\equiv \sim[\sim(\exists x[x < 7])] \wedge \sim(\forall x\exists y[xy = 0]) \equiv \exists x[x < 7] \wedge \exists x\forall y[xy \neq 0]$

โจทย์เพิ่มเติม

1. พิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่ามีข้อถูกทั้งหมดกี่ข้อ

- ประพจน์ $p \rightarrow (p \rightarrow (q \vee r))$ สมมูลกับประพจน์ $p \rightarrow (q \vee r)$
- ประพจน์ $p \wedge (q \rightarrow r)$ สมมูลกับประพจน์ $(q \rightarrow p) \vee \sim(p \rightarrow \sim r)$

พิจารณาข้อความแรก

ใช้สมบัติ $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ และการเปลี่ยนกลุ่ม $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee q \vee r$

$$p \rightarrow (p \rightarrow (q \vee r)) \equiv \sim p \vee (\sim p \vee (q \vee r)) \equiv \sim p \vee (q \vee r) \equiv p \rightarrow (q \vee r)$$

ดังนั้นข้อความแรก เป็นจริง

พิจารณาข้อความที่ 2

$$(q \rightarrow p) \vee \sim(p \rightarrow \sim r)$$

$$\equiv (\sim q \vee p) \vee \sim(\sim p \vee \sim r)$$

$$\equiv (\sim q \vee p) \vee (p \wedge r)$$

$$\equiv \sim q \vee [p \vee (p \wedge r)]$$

$$\equiv \sim q \vee [(p \wedge T) \vee (p \wedge r)]$$

$$\equiv \sim q \vee [p \wedge (T \vee r)]$$

$$\equiv \sim q \vee p$$

สมบัติที่ใช้

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

$$\sim(p \vee r) \equiv \sim p \wedge \sim r$$

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee q \vee r$$

$$p \wedge T \equiv p$$

การกระจาย

$$p \wedge T \equiv p, p \vee T \equiv T$$

เห็นได้ชัดว่าไม่สมมูลกัน เนื่องจาก LHS ยังขึ้นกับตัวแปรอิสระ r

สรุปได้ว่ามีข้อถูกทั้งหมด 1 ข้อ

2. กำหนดให้ $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นประโยคเปิด ประโยค $\forall x[P(x)] \rightarrow \exists x[\sim Q(x)]$ สมมูลกับ
ประโยค ในข้อใดต่อไปนี้ (PAT1 ก.ค. 52 ข้อ1)

1. $\forall x[\sim P(x)] \rightarrow \exists x[Q(x)]$

2. $\forall x[Q(x)] \rightarrow \exists x[\sim P(x)]$

3. $\exists x[P(x)] \rightarrow \forall x[Q(x)]$

4. $\exists x[\sim Q(x)] \rightarrow \forall x[P(x)]$

สังเกตว่าทุกตัวเลือก คงรูปเป็น ถ้า.... แล้ว

พิจารณาการดำเนินการของ ถ้า.... แล้ว ที่ยังให้ผลลัพธ์เป็นการดำเนินการเดิมคือ

$$p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$$

$$\forall x[P(x)] \rightarrow \exists x[\sim Q(x)] \equiv \sim(\exists x[\sim Q(x)]) \rightarrow \sim(\forall x[P(x)])$$

$$\equiv \sim(\exists x[\sim Q(x)]) \rightarrow \sim(\forall x[P(x)])$$

$$\equiv \forall x[Q(x)] \rightarrow \exists x[\sim P(x)]$$

จึงได้ว่าคำตอบคือข้อ 2

ตัวเลือกอื่นสามารถพิจารณาได้จากการแปลงเป็น และ หรือ แล้วพิจารณาความหมาย

เช่นพิจารณาตัวเลือกที่ 3

$$\forall x[P(x)] \rightarrow \exists x[\sim Q(x)] \equiv \sim(\forall x[P(x)]) \vee \exists x[\sim Q(x)]$$

$$\equiv \exists x[\sim P(x)] \vee \exists x[\sim Q(x)]$$

คือการบอกว่า ทุกตัวไม่เป็น P หรือทุกตัวเป็น Q

$$\exists x[P(x)] \rightarrow \forall x[Q(x)] \equiv \forall x[\sim P(x)] \vee \forall x[Q(x)]$$

คือการบอกว่า มีบางตัวไม่เป็น P หรือมีบางตัวไม่เป็น Q

จะเห็นได้ว่าความหมายไม่เหมือนกัน เช่นพิจารณาที่เป็นทั้ง P และ Q

3. นายชัดแจ้งได้ทราบข้อมูลของคน 5 คนคือ A, B, C, D และ E ดังนี้

A บอกว่า “ C และ D พูดโกหก”

B บอกว่า “ A และ C เป็นคนพูดจริง”

C บอกว่า “ D พูดโกหก”

D บอกว่า “ E พูดโกหก”

E บอกว่า “ B พูดโกหก”

จากข้อมูลดังกล่าวท่านจะช่วยนายชัดแจ้งค้นหาว่าใครบ้างเป็นคนพูดจริงและใครบ้างเป็นคนพูดเท็จ (PAT1 มี.ค. 53)

deduction

พิจารณาไล่จากบนลงล่างเฉพาะข้อมูลที่ยังไม่ได้ใช้ ลองตัดข้อย่ถ้าทางตัน ใช้กรณีนั้นไม่ได้ถ้าเกิดข้อขัดแย้ง สมมติให้ A พูดจริง จะได้ว่า C และ D พูดโกหก

C บอกว่า นิเสธ “ D พูดโกหก” คือ D พูดจริง เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น A พูดโกหก จะได้ว่า นิเสธของ “ C และ D พูดโกหก” คือ C หรือ D พูดจริง

เห็นได้ชัดว่า B พูดโกหก เนื่องจาก A พูดโกหก ดังนั้น C พูดจริง

C พูดจริง จะได้ว่า “ D พูดโกหก”

และได้ข้อมูลจาก D ต่อว่า นิเสธของ “ E พูดโกหก” คือ E พูดจริง

และได้ข้อมูลจาก E ต่อว่า “ B พูดโกหก” ซึ่งเป็นความจริง

และพิจารณาได้ว่าใช้ข้อมูลครบทุกคนแล้ว ไม่เกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น

A, B, D พูดโกหก และ C, E พูดจริง