

พื้นฐาน

พื้นฐาน:

เติมค่าทางตรีโกณต่อไปนี้

ฟังก์ชัน	0°	30°	45°	60°	90°
sin					
cos					
tan					
cosec					
sec					
cot					

เรเดียน:

วิธีการแปลงมุมระหว่าง เรเดียน กับ องศา

จาก π เรเดียน = 180 องศา

เทียบบัญญัติไตรยางค์ :

$$1 \text{ เรเดียน} = \frac{180}{\pi} \text{ องศา}$$

$$1 \text{ องศา} = \frac{\pi}{180} \text{ เรเดียน}$$

แปลงมุมต่อไปนี้จากหน่วยองศาเป็นหน่วยเรเดียน:

$$120 \text{ องศา} = \dots\dots\dots \text{ เรเดียน}$$

$$175 \text{ องศา} = \dots\dots\dots \text{ เรเดียน}$$

$$240 \text{ องศา} = \dots\dots\dots \text{ เรเดียน}$$

$$305 \text{ องศา} = \dots\dots\dots \text{ เรเดียน}$$

$$30 \text{ องศา} = \dots\dots\dots \text{ เรเดียน}$$

$$75 \text{ องศา} = \dots\dots\dots \text{ เรเดียน}$$

$$450 \text{ องศา} = \dots\dots\dots \text{ เรเดียน}$$

$$720 \text{ องศา} = \dots\dots\dots \text{ เรเดียน}$$

แปลงมุมต่อไปนี้จากหน่วยเรเดียนเป็นหน่วยองศา:

$$\frac{3}{4} \text{ เรเดียน} = \dots\dots\dots \text{ องศา}$$

$$1 \text{ เรเดียน} = \dots\dots\dots \text{ องศา}$$

$$\frac{7\pi}{27} \text{ เรเดียน} = \dots\dots\dots \text{ องศา}$$

$$\frac{\pi}{6} \text{ เรเดียน} = \dots\dots\dots \text{ องศา.}$$

Sin Cos tan

จากสมบัติทางตรีโกณ $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ และ $\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$

ทำต่อไปนี้อยู่ในรูปอย่างง่าย

1. $\cos^2(3\theta) + \sin^2(3\theta)$

2. $\cos^2(\theta) - 1$

3. $(1 + \sin\theta)^2 + (1 - \sin\theta)^2 + 2\cos^2\theta$

$$4. \quad 5 - 5\sin^2(3\theta)$$

$$5. \quad \frac{\sin(3\theta)}{\sqrt{1-\sin^2(3\theta)}}$$

$$6. \quad \frac{\cos^4(\theta) - \sin^4(\theta)}{\cos^2(\theta)}$$

$$7. \sin^4(\theta) + \sin^2(\theta) \cos^2(\theta)$$

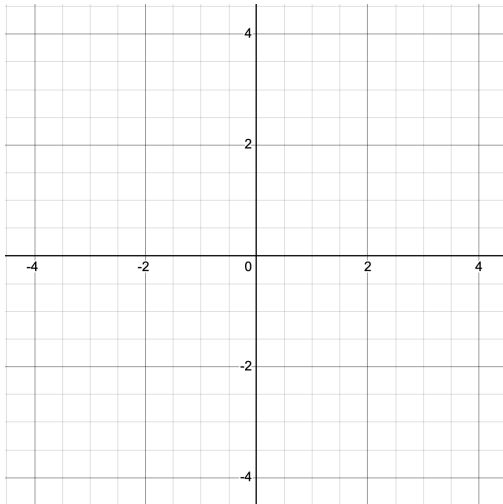
$$8. (\cos\theta + \sin\theta)(\cos\theta - \sin\theta)$$

$$9. (-\cos\theta + 2\sin\theta)^2 + (\cos\theta + 2\sin\theta)^2$$

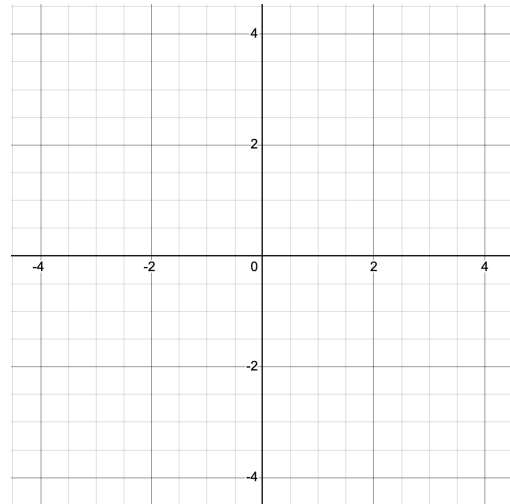
Sin Cos tan: กราฟ

จงวาดกราฟต่อไปนี้โดยคร่าว ๆ โดย $\theta \in [-\pi, \pi]$

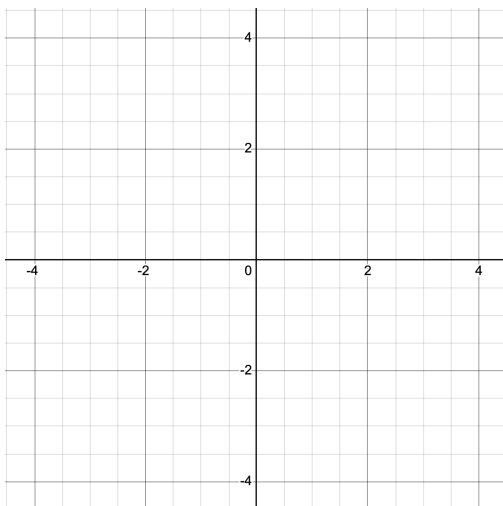
$$y = \sin(\theta)$$



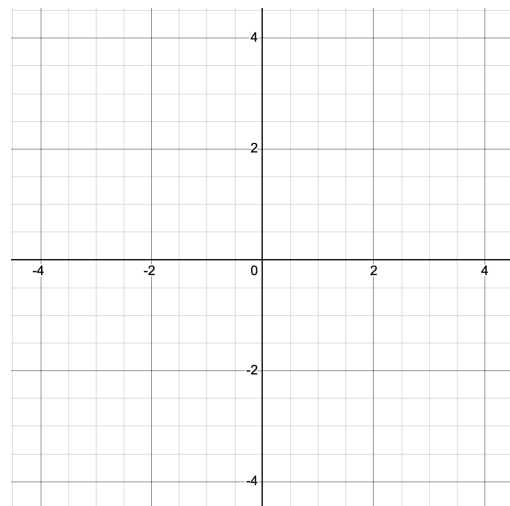
$$y = \cos(\theta)$$



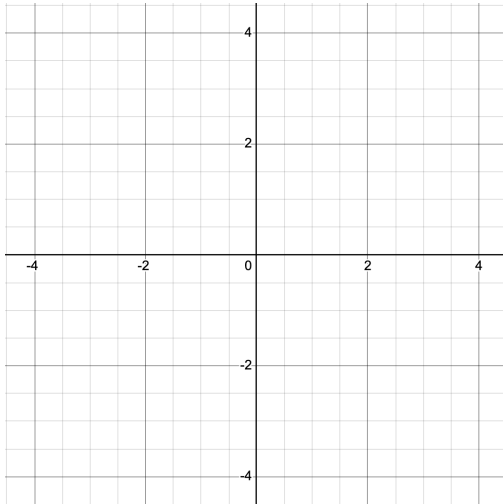
$$y = \tan(\theta)$$



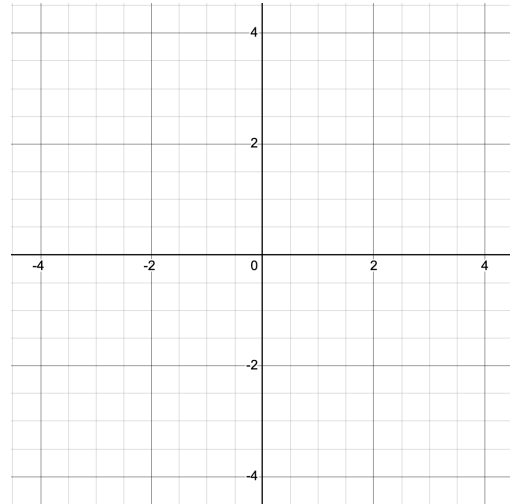
$$y = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$$



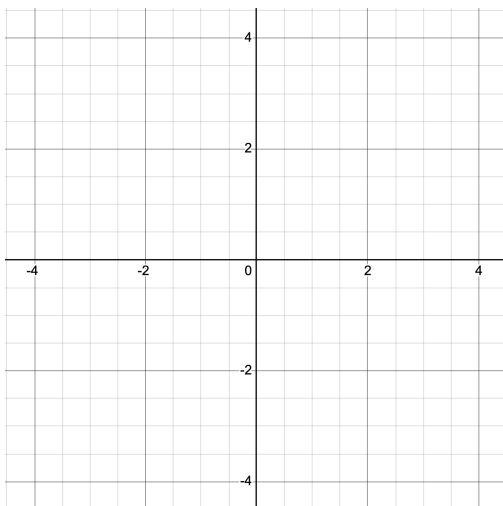
$$y = \tan(\theta - \frac{\pi}{6})$$



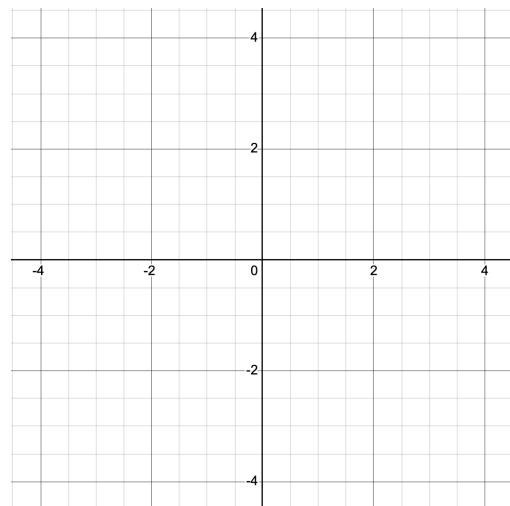
$$y = \cos(2\theta)$$



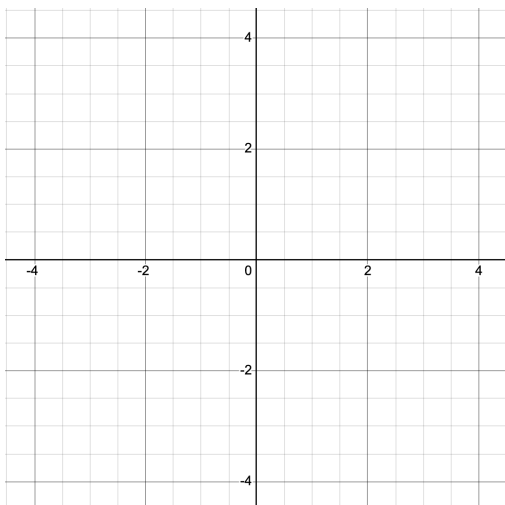
$$y = \cos(4(\theta - \frac{\pi}{3}))$$



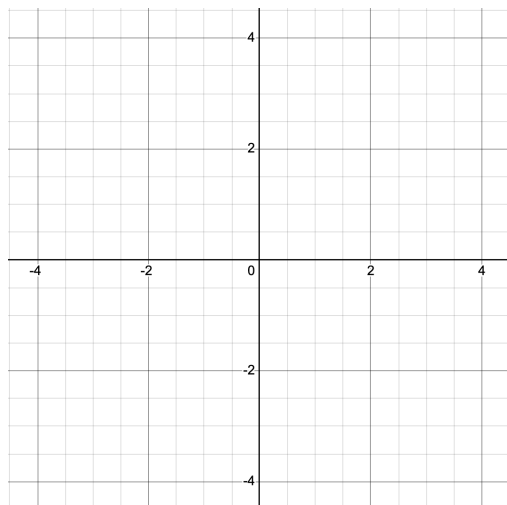
$$y = \tan(2\theta - \frac{\pi}{6})$$



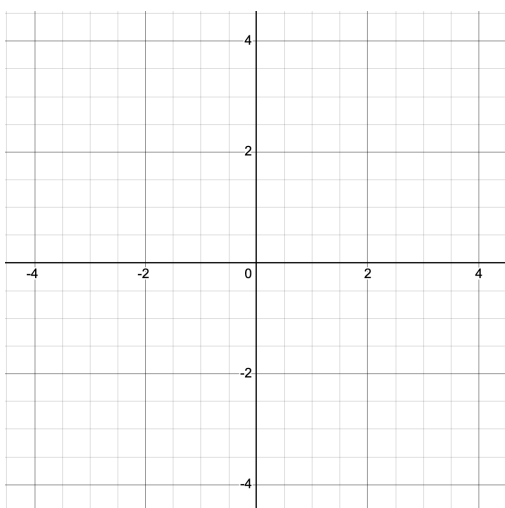
$$y = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$



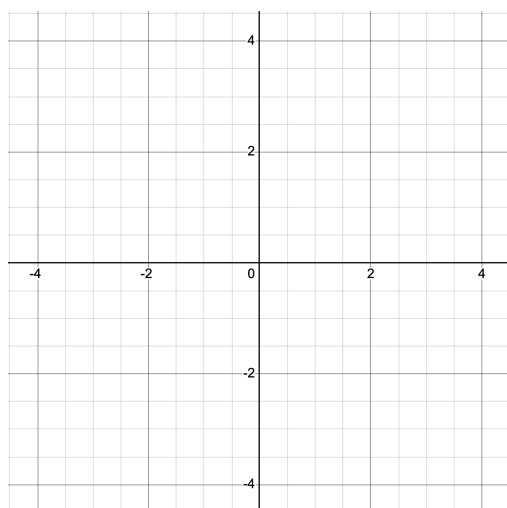
$$y = \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$$



$$y = \cos\left(\frac{1}{3}\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)\right)$$



$$y = \sin\left(\frac{\theta}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$$



แก้สมการ sin cos tan

จงหาค่าของ $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta, \csc\theta, \sec\theta, \cot\theta$ เมื่อ $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$

1. $|\cos(\theta)| = \frac{1}{2}$

2. $|\tan(\theta)| = \frac{5}{4}$

3. $|\sin(\theta)| = \frac{\sqrt{5}}{3}$

จงหาค่าของ $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta, \csc\theta, \sec\theta, \cot\theta$ เมื่อ $\theta \in [-\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$

4. $|\cos(\theta)| = \frac{3}{5}$

5. $|\tan(\theta)| = \frac{5}{11}$

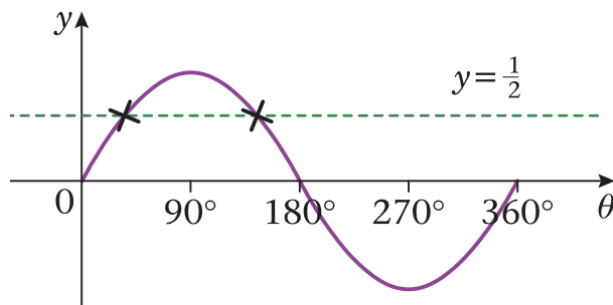
6. $|\sin(\theta)| = \frac{\sqrt{5}}{12}$

จงแก้สมการตรีโกณต่อไปนี้ โดย $\theta \in [0, 2\pi]$

ตัวอย่าง

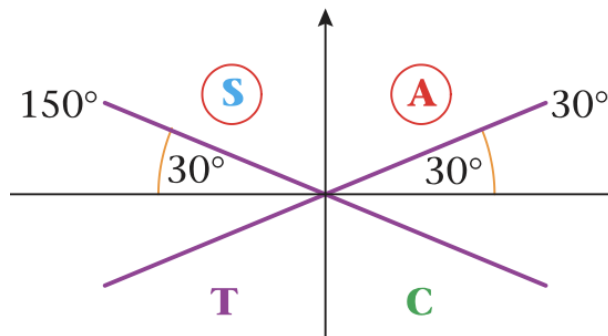
$$\sin(\theta) = \frac{1}{2}$$

สามารถหาได้จากการหาจุดตัดของกราฟ $y = \sin(\theta)$ กับ $y = \frac{1}{2}$



หรือถ้าทราบคำตอบเพียง 1 ค่า สามารถหาค่าที่เหลือได้ โดยการ

นำ 30° ไปใส่ในควอดรนต์ทั้ง 4 แล้วพิจารณาเครื่องหมายของค่าทางตรีโกณนั้น



จะได้อีกคำตอบคือมุม 150° ซึ่งอยู่ในควอดรนต์ที่ 2 ซึ่งให้ค่า $\sin$ เป็นบวก และมีค่าเท่ากับ $\frac{1}{2}$

โจทย์ เมื่อ $\theta \in [0, 2\pi]$

1. $\cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

2. $\sin(\theta) = \sin(30^\circ)$

3. $\cos(\theta) = -\sin(30^\circ)$

4. $(\sin(\theta) - 1)(2\cos(\theta) + 1) = 0$

5. $\sin^2(\theta) + 2\sin(\theta) + 3 = 0$

6. $2\sin\theta + \tan\theta = 1 + 2\sin\theta\tan\theta$

แก้สมการตรีโกณต่อไปนี้ โดย $\theta \in [-4\pi, -2\pi]$

7. $9\tan^2\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = 16$

8. $\sin\theta \tan(\theta - 180^\circ) + \tan\theta = \cos(-\theta)$

9. $\tan(\theta - 180^\circ) = \cos\theta$

แก้สมการตรีโกณในรูปแบบ $n\theta + \alpha$ ต่อไปนี้ โดย $\theta \in [0, 2\pi]$

ตัวอย่าง

$$\sin(2\theta - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$$

สมมติ $X = 2\theta - \frac{\pi}{4}$ แล้วพิจารณาขอบเขตของ X :

$$2\theta - \frac{\pi}{4} \in [2(0) - \frac{\pi}{4}, 2(2\pi) - \frac{\pi}{4}] \text{ ได้ว่า } X \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{15\pi}{4}]$$

จากนั้นหา $\sin(X) = \frac{1}{2}$ โดย $X \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{15\pi}{4}]$

$$\text{ได้ว่า } X = 2\theta - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}$$

$$\theta = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}), \frac{1}{2}(\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{4}), \frac{1}{2}(\frac{13\pi}{6} + \frac{\pi}{4}), \frac{1}{2}(\frac{17\pi}{6} + \frac{\pi}{4})$$

$$\text{จะได้ว่า } \theta = \frac{5\pi}{24}, \frac{13\pi}{24}, \frac{29\pi}{24}, \frac{37\pi}{24}$$

หาคำตอบ θ ทั้งหมดจากโจทย์ต่อไปนี้ โดย $\theta \in [0, 2\pi]$

1. $\sin(2\theta - 35^\circ) = -1$

2. $\sin(3\theta) = \sqrt{3} \cos(3\theta)$

3. $\sin(-\frac{5\theta}{6} - \frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$4. \cos^2\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 1 + \sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$5. 1 + \sin^2(2\theta) = \frac{7}{4}$$

6. $\sin^2(2\theta + 10^\circ) = 0.8$

7. $2(\sin(\frac{\theta}{2}) + 2\cos(\frac{\theta}{2})) = \sin(\frac{\theta}{2}) + 5\cos(\frac{\theta}{2})$

8. $\cos^2(3\theta) - \cos(3\theta) = 2$

9. $\sin^2\theta - 2\sin(2\theta) + \cos^2\theta = 0$

จงหามุม อีก 4 มุมในหน่วยเรเดียนที่ให้ผลลัพธ์เดียวกับมุม θ

ฟังก์ชัน(หน่วยเรเดียน)	θ	มุม1	มุม2	มุม3	มุม4
$\sin(\theta)$	$\frac{\pi}{4}$				
$\cos(\theta)$	$\frac{\pi}{3}$				
$\tan(\theta + \frac{\pi}{4})$	$\frac{\pi}{6}$				
$\sec(\theta - \frac{3\pi}{4})$	$\frac{\pi}{12}$				
$\cot(\theta + \frac{7\pi}{4})$	$\frac{\pi}{2}$				
$\csc(\theta + \frac{73}{37}^\circ)$	$\frac{\pi}{24}$				
$\sin(\theta - 10^\circ)$	π				

โจทย์ท้าทาย

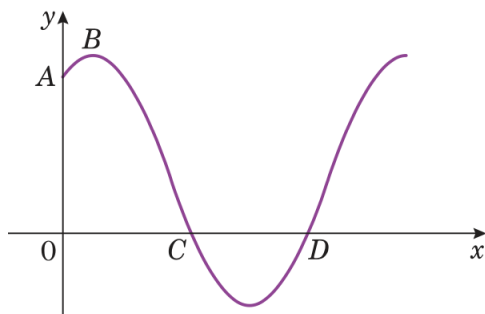
1. หาค่าของ θ ทั้งหมดที่เป็นไปได้ โดย $\theta \in [0, 2\pi]$ ของสมการ

$$2\cos^2(3\theta - \frac{\pi}{4}) - 9\sin(-3(\theta - \frac{\pi}{12})) = 3\sin^2(-3\theta + 45^\circ)$$

$\theta =$ _____

2. ให้กราฟของฟังก์ชัน $y = 1 + 2\sin(px^\circ + q^\circ)$ โดย $q \in [0, \frac{\pi}{2}]$

และ p เป็นจำนวนเต็ม โดยกำหนดให้ B เป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์ และพิกัดจุด A และ C คือ $(0, 2), (45, 0)$ ตามลำดับ



จงหาค่าของ p, q และพิกัดจุด B, D

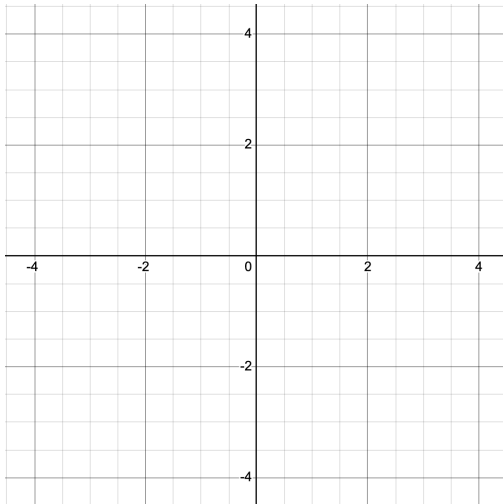
3. ให้ $\tan\theta = \frac{12}{5}$ เมื่อ $\sin\theta > 0$ จงหาค่าของ $\frac{2\sin\theta-3\cos\theta}{4\sin\theta-9\cos\theta}$

4. ให้จุด P_1 และ P_2 เป็นจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วย โดยที่จุด P_1 มีพิกัดเป็น $(1, 0)$ และส่วนโค้ง P_1P_2 ยาว $\pi + \theta$ หน่วย เมื่อ $\theta \in (0, \pi)$ ถ้า $(\sin\theta)(\tan\theta) < 0$ และ $|\sin\theta| = \frac{1}{5}$ แล้วจุด P_2 มีพิกัดเป็นเท่าใด

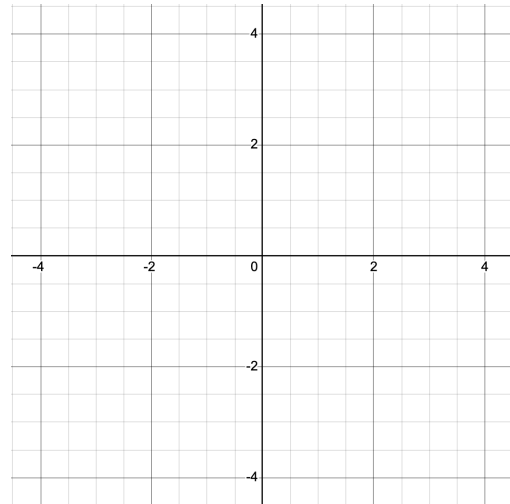
กราฟ cosec sec cot

จงวาดกราฟต่อไปนี้โดยคร่าว ๆ โดย $\theta \in [-\pi, \pi]$

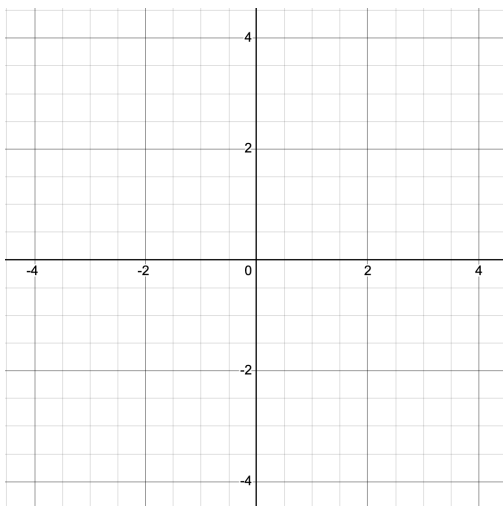
$$y = \csc(\theta)$$



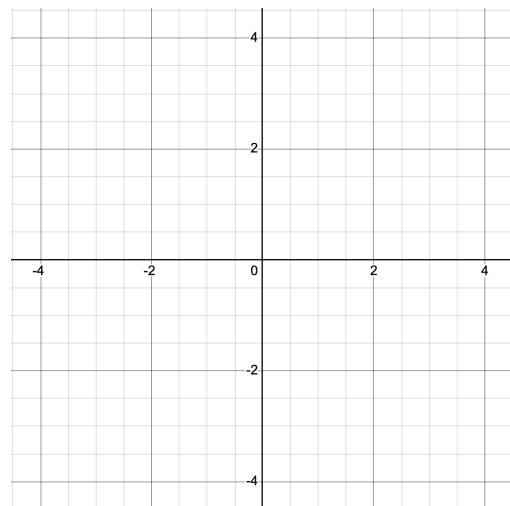
$$y = \sec(\theta)$$



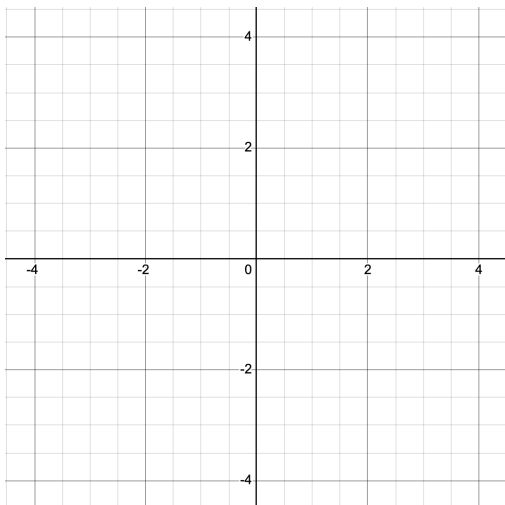
$$y = \cot(\theta)$$



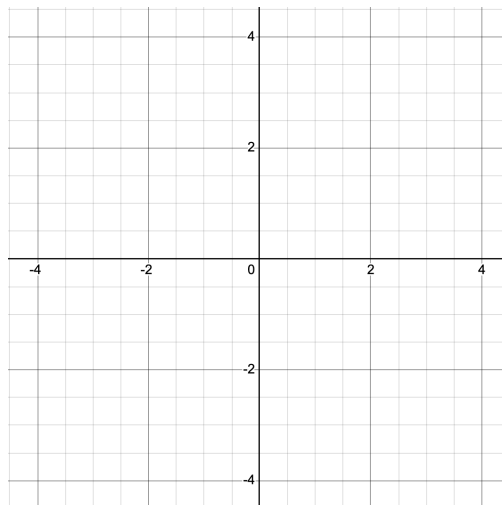
$$y = \sec\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$$



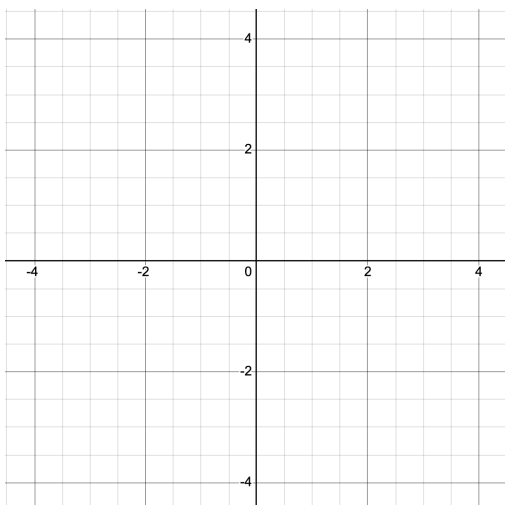
$$y = \cot\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$$



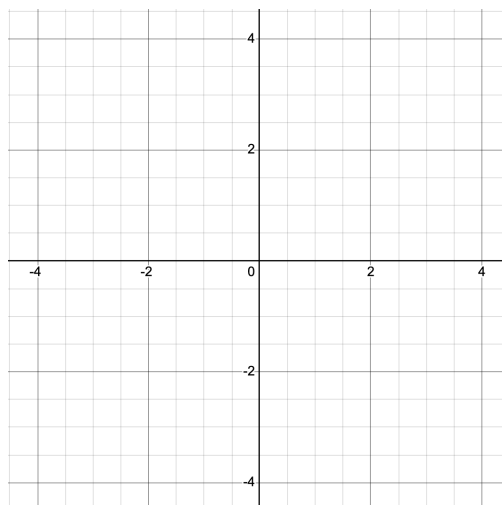
$$y = \sec(2\theta)$$



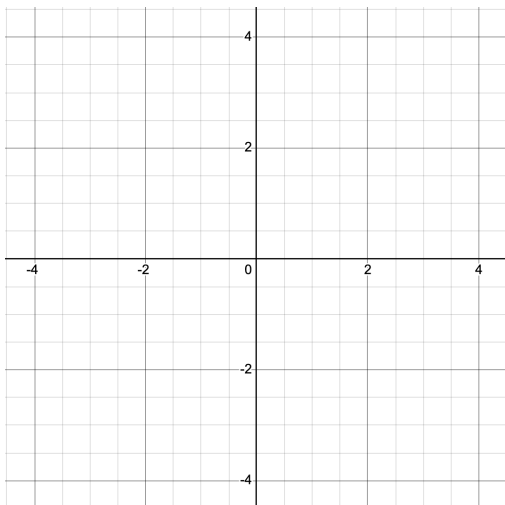
$$y = \csc\left(4\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)\right)$$



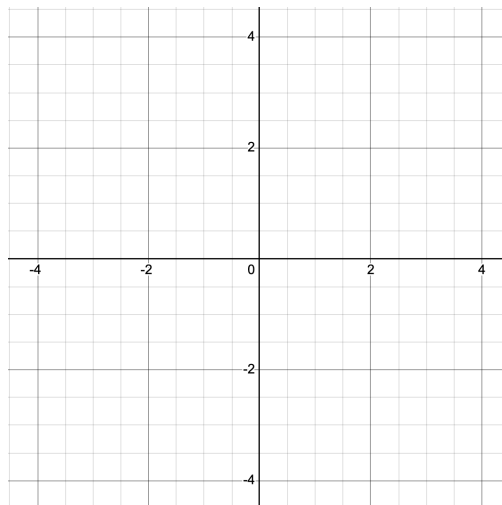
$$y = \cot\left(2\theta - \frac{\pi}{6}\right)$$



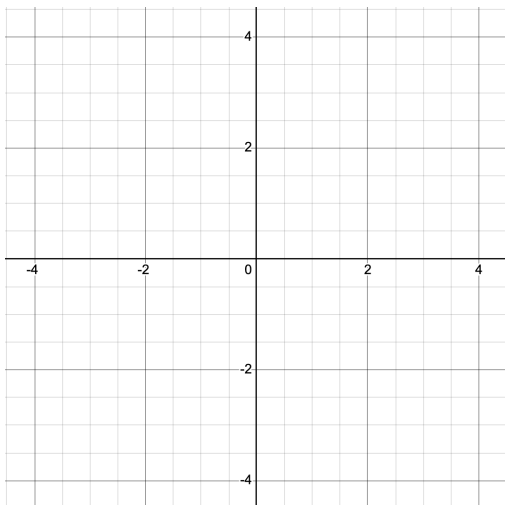
$$y = \cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$$



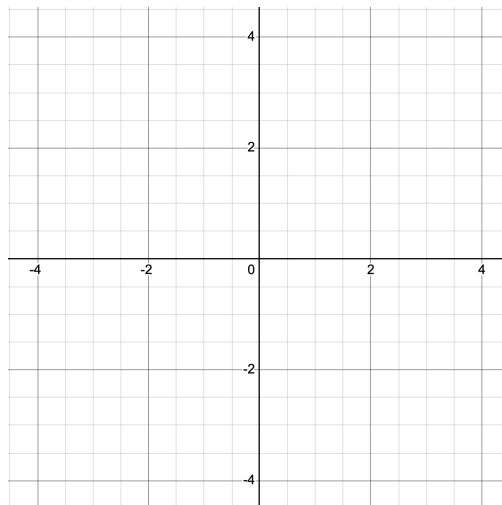
$$y = \sec\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$$



$$y = \csc\left(\frac{1}{3}\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)\right)$$



$$y = \cot\left(\frac{\theta}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$$



จัดรูป csc sec cot

จัดรูปทางตรีโกณต่อไปนี้ให้อยู่ในรูป $\sin\theta$ หรือ $\cos\theta$ ในรูปอย่างง่าย:

1. $\sin\theta\cot\theta$

2. $\tan\theta\cot\theta$

3. $\sin\theta\cos\theta(\tan\theta + \cot\theta)$

$$4. \csc \theta \sin^3 \theta + \sec \theta \cos^3 \theta$$

$$5. \sec^2 \theta \cos^5 \theta + \cot \theta \csc \theta \sin^4 \theta$$

$$6. \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} + \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta}$$

จากสมบัติทางตรีโกณ $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ เมื่อหารด้วย $\cos^2 \theta$ หรือ $\sin^2 \theta$ ทั้ง 2 ข้างของสมการ จะได้ว่า

$$1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta \quad \text{และ} \quad \tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$$

ใช้เพื่อจัดรูปต่อไปนี้อยู่ในรูปอย่างง่าย

1. $\csc^4 \theta - \cot^4 \theta$

2. $\tan^2 \theta (\csc^2 \theta - 1)$

3. $\frac{\tan \theta \sec \theta}{1 + \tan^2 \theta}$

$$4. \quad 2 - \tan^2 \theta + \sec^2 \theta$$

$$5. \quad \frac{\csc \theta \cot \theta}{1 + \cot^2 \theta}$$

$$6. \quad \tan^4 \theta + \sec^4 \theta - 2\sec^2 \theta \tan^2 \theta$$

$$7. \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta}$$

$$8. (\sec \theta + \tan \theta)^2 + \frac{1}{(\sec \theta + \tan \theta)^2} + 2$$

$$9. \frac{2\sec^2 \theta - \tan^2 \theta - 1}{2\sec^2 \theta - \tan^2 \theta - 2} \quad \text{and} \quad 2\sec^2 \theta - \tan^2 \theta - 2 \neq 0$$

แก้สมการตรีโกณ

แก้สมการตรีโกณ ในช่วงที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1. $4\csc^2\theta - 9 = \cot\theta$ เมื่อ $\theta \in [0, 2\pi]$

2. $\sec^2\theta = 3\tan\theta$ เมื่อ $\theta \in [0, 2\pi]$

$$3. \tan^2 \theta - 2 \sec \theta + 1 = 0 \text{ เมื่อ } \theta \in [-\pi, \pi]$$

$$4. \csc^2 \theta + 1 = 3 \cot \theta \text{ เมื่อ } \theta \in [-\pi, \pi]$$

$$5. \quad 3\sec\frac{\theta}{2} = 2\tan^2\frac{\theta}{2} \quad \text{เมื่อ } \theta \in [0, 2\pi]$$

$$6. \quad (\sec\theta - \cos\theta)^2 = \tan\theta - \sin^2\theta \quad \text{เมื่อ } \theta \in [0, \pi]$$

7. $\tan^2 2\theta = \sec 2\theta - 1$ เมื่อ $\theta \in [0, \pi]$

8. $\sec^2 \theta - (1 + \sqrt{3})\tan \theta + \sqrt{3} = 1$ เมื่อ $\theta \in [0, 2\pi]$

โจทย์ท้าทาย

โจทย์ท้าทาย

1. กำหนดให้ $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$ และ $\cos\theta + \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

จงหาค่าของ $\tan\theta - \cot\theta$ ให้สูตร $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

และ $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ เพิ่มเติม

2. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยที่มุม C เป็นมุมฉาก และมุม A สอดคล้องกับสมการ $2(\cos^2 A - \sin^2 A) - 8\sin A + 3 = 0$ ให้ a, b และ c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A มุม B และมุม C ตามลำดับ ถ้า $a + c = 30$ แล้วค่าของ $a\sin A + b\sin B$ เท่ากับเท่าใด

ผลบวก ผลต่างรวม

ผลบวกมุม

จงเขียนสูตรผลบวกมุมต่อไปนี้

$$\sin(\alpha + \beta) = \underline{\hspace{4cm}}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \underline{\hspace{4cm}}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \underline{\hspace{4cm}}$$

$$\csc(\alpha + \beta) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\sec(\alpha + \beta) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\cot(\alpha + \beta) = \underline{\hspace{2cm}}$$

จงใช้สูตรที่ได้หามา หาค่าต่อไปนี้

$$\sin(30 + 60)$$

$$\sec(30 + 60)$$

$$\tan(30 + 60)$$

$$\cos(75)$$

$$\csc(75)$$

$$\cot(75)$$

ให้ $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$ เมื่อ $\alpha \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$ และ $\cos\beta = -\frac{12}{13}$

เมื่อ $\beta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ จงหาค่าทางตรีโกณต่อไปนี้

1. $\cot(\alpha + \beta)$

2. $\sin(\alpha + \beta)$

3. $\sec(\alpha + \beta)$

4. $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha)$

5. $\cot(\frac{3\pi}{2} + \alpha)$

6. $\sec(\pi + \alpha)$

ผลต่างมุม

จงเขียนสูตรผลต่างมุมต่อไปนี้

$$\sin(\alpha - \beta) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\csc(\alpha - \beta) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\sec(\alpha - \beta) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\cot(\alpha - \beta) = \underline{\hspace{2cm}}$$

จงใช้สูตรที่ได้หามา หาค่าต่อไปนี้

$$\sin(60 - 30)$$

$$\sec(60 - 30)$$

$$\tan(60 - 30)$$

$$\cos(15)$$

$$\csc(15)$$

$$\cot(15)$$

ให้ $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$ เมื่อ $\alpha \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$ และ $\cos\beta = -\frac{7}{25}$

เมื่อ $\beta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ จงหาค่าทางตรีโกณต่อไปนี้

1. $\cot(\alpha - \beta)$

2. $\sin(\alpha - \beta)$

3. $\sec(\alpha - \beta)$

4. $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)$

5. $\cot(\frac{3\pi}{2} - \alpha)$

6. $\sec(-\pi + \alpha)$

จัดรูปผลบวกผลต่างมุม

จงทำต่อไปนี้อยู่ในรูปอย่างง่าย

1. $\sin(\theta + \frac{\pi}{3}) + \sin(\theta - \frac{\pi}{3})$

2. $\cos(\theta + \frac{\pi}{3}) + \sqrt{3}\sin\theta$

$$3. \frac{\tan(\frac{7\pi}{12}) - \tan(\frac{\pi}{3})}{1 + \tan(\frac{7\pi}{12})\tan(\frac{\pi}{3})}$$

$$4. \cos(\frac{3x+2y}{2})\cos(\frac{3x-2y}{2}) - \sin(\frac{3x+2y}{2})\sin(\frac{3x-2y}{2})$$

แก้สมการผลบวกผลต่างมุม

จงแก้สมการต่อไปนี้ เมื่อ $\theta \in [0, 2\pi]$

1. $3\cos\theta = 2\sin(\theta + \frac{\pi}{3})$

2. $\sin(\theta + \frac{\pi}{6}) + 2\sin\theta = 0$

3. $\cos\theta = \cos(\theta + \frac{\pi}{3})$

4. $\tan(\theta - \frac{\pi}{4}) = 6\tan(\theta)$

5. $\sin\theta + \cos\theta = 1$

6. $\sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta = 1$

មុន 2 ទៅ មុន 3 ទៅ

ผลบวกมุม

จงเขียนสูตรผลบวกมุมต่อไปนี้

$$\sin(2\alpha) = \underline{\hspace{4cm}}$$

$$\cos(2\alpha) = \underline{\hspace{4cm}}$$

$$\tan(2\alpha) = \underline{\hspace{4cm}}$$

$$\csc(2\alpha) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\sec(2\alpha) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\cot(2\alpha) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\sin(3\alpha) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\cos(3\alpha) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\tan(3\alpha) = \underline{\hspace{2cm}}$$

จงใช้สูตรที่ได้หามา หาค่าต่อไปนี้

$$\sin(2 * 30)$$

$$\sec(2 * 30)$$

$$\cot(2 * 30)$$

$$\cos(3 * 30)$$

$$\csc(3 * 30)$$

$$\tan(3 * 30)$$

จัดรูปต่อไปนี้ให้เป็นรูปอย่างง่าย

จัดรูปต่อไปนี้ให้เป็นรูปอย่างง่าย

1. $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta$

2. $6\sin 2\theta \cos 2\theta$

$$3. \quad 2 - 4\sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$4. \quad \frac{2\tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}$$

5. $\sqrt{1 + \cos 2\theta}$

6. $\sin^2 \theta \cos^2 \theta$

7. $4\sin\theta\cos\theta\cos2\theta$

8. $\frac{\tan\theta}{\sec^2\theta-2}$

แก้สมการมุม 2 เท่า มุม 3 เท่า

จงแก้สมการต่อไปนี้ เมื่อ $\theta \in [0, 2\pi]$

1. $\sin 2\theta = \sin \theta$

2. $\cos(2\theta) = 1 - \cos \theta$

3. $3\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta$

4. $2\tan(2\theta)\tan(\theta) = 3$

5. $-\sin\theta + 3\cos 2\theta - 1 = 0$

6. $3\tan\theta - 2\sin 2\theta = 0$

นมครึ่งแก้ว

มุมครึ่งเท่า

จงเขียนสูตรมุมครึ่งเท่าต่อไปนี้

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \underline{\hspace{4cm}}$$

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \underline{\hspace{4cm}}$$

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \underline{\hspace{4cm}}$$

จงใช้สูตรที่ได้หามา หาค่าต่อไปนี้

$$\sin\left(\frac{60}{2}^\circ\right)$$

$$\cos\left(\frac{60}{2}^\circ\right)$$

$$\tan\left(\frac{60}{2}^\circ\right)$$

$$\cos(15^\circ)$$

$$\sin(67.5^\circ)$$

$$\tan(112.5^\circ)$$

โจทย์มุมครึ่งเท่า

1. ให้แสดงว่า $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$

2. ให้ $A + B + C = \pi$ และ $\sin C \cos(A + B) = \frac{1}{2}$
หาค่าของ $\tan\left(\frac{C}{2}\right)$

แปลงผลบวกฟังก์ชันตรีโกณเป็นผลคูณ

จงเขียนสูตรผลคูณต่อไปนี้ในรูป $\sin\theta$ หรือ $\cos\theta$

$$2\sin A \cos B = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$2\cos A \sin B = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$2\cos A \cos B = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$2\sin A \sin B = \underline{\hspace{2cm}}$$

จงหาค่าของโจทย์ต่อไปนี้

1. $2\sin 45^\circ \cos 15^\circ$

2. $\frac{1}{2}\sin 165^\circ \sin 15^\circ$

$$3. \frac{1}{2\sin 10^\circ} - 2\sin 70^\circ$$

$$4. \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5}$$

5. $\sin \frac{15\pi}{34} \sin \frac{13\pi}{34} \sin \frac{9\pi}{34} \sin \frac{\pi}{34}$

6. ให้ $\cos \theta = \frac{3}{5}$ และ $\theta \in [\pi, 2\pi]$ หาค่าของ

$$100 \cot \frac{\theta}{2} \csc \frac{\theta}{2} \sin \frac{5\theta}{2}$$

แปลงผลคูณฟังก์ชันตรีโกณเป็นผลบวก

จงเขียนสูตรผลบวกต่อไปนี้ในรูป $\sin\theta$ หรือ $\cos\theta$

$$\sin A + \sin B = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\sin A - \sin B = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\cos A + \cos B = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\cos A - \cos B = \underline{\hspace{2cm}}$$

จงหาค่าของโจทย์ต่อไปนี้

1. $\cos 465^\circ + \cos 165^\circ$

2. $\sin 78^\circ - \sin 18^\circ + \cos 132^\circ$

$$3. \sin 10^\circ + \sin 20^\circ + \sin 40^\circ + \sin 50^\circ - \sin 70^\circ - \sin 80^\circ$$

$$4. \frac{\cos 10^\circ + \sin 40^\circ}{\sin 70^\circ}$$

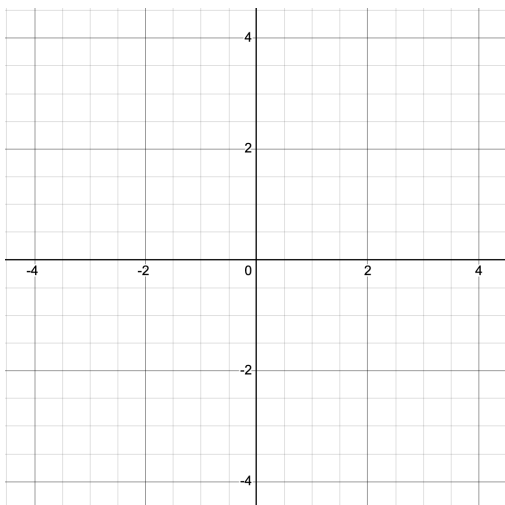
5. $\cos^2 A + \cos^2(120 - A) + \cos^2(120 + A)$

6. ให้ $\tan \theta = \frac{1}{2}$ และ $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ หาค่าของ $\frac{\sin 2\theta + \sin 5\theta - \sin \theta}{\cos 2\theta + \cos 5\theta + \cos \theta}$

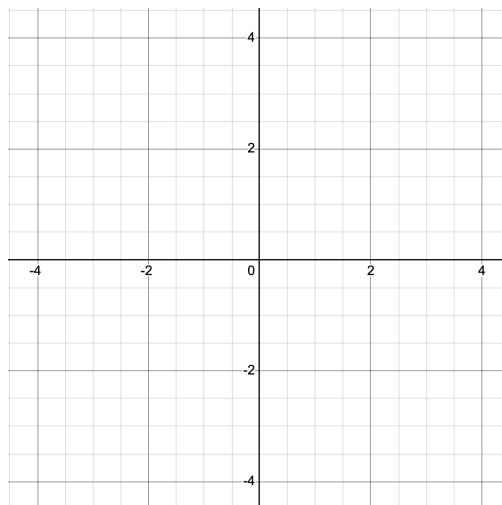
อินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณ

วาดกราฟของของอินเวอร์สฟังก์ชัน

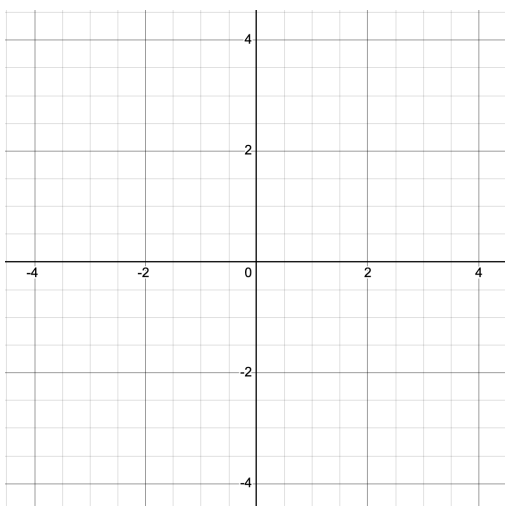
$$y = \arcsin(\theta)$$



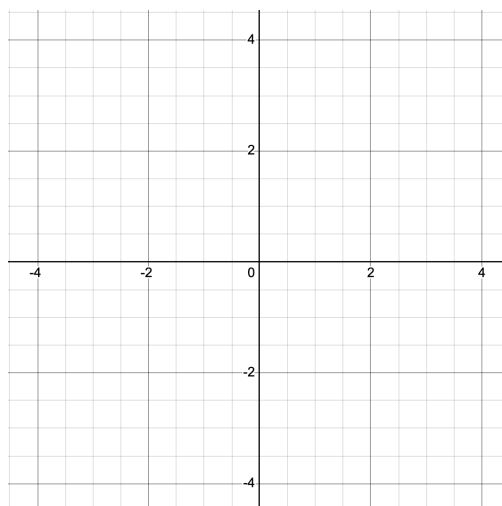
$$y = \arccos(\theta)$$



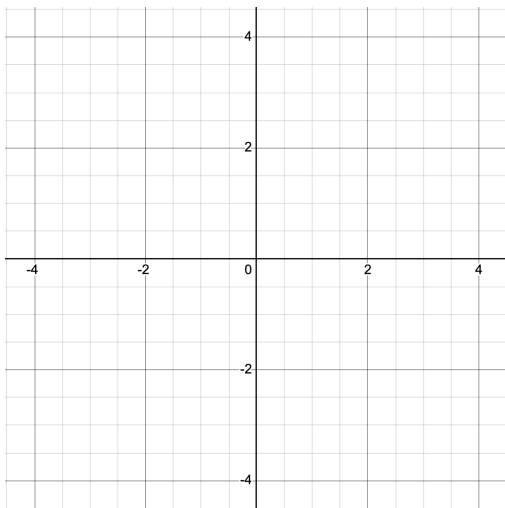
$$y = \arctan(\theta)$$



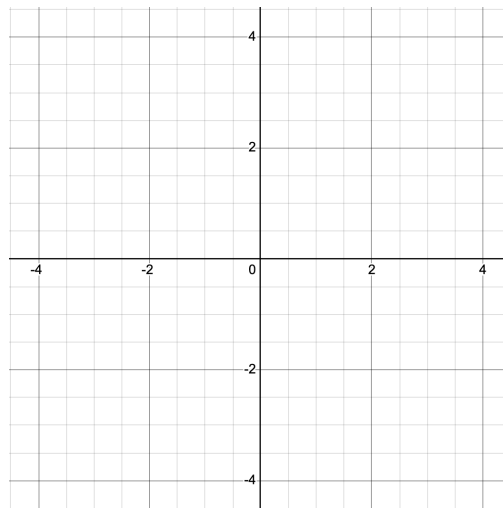
$$y = \operatorname{arccsc}(\theta)$$



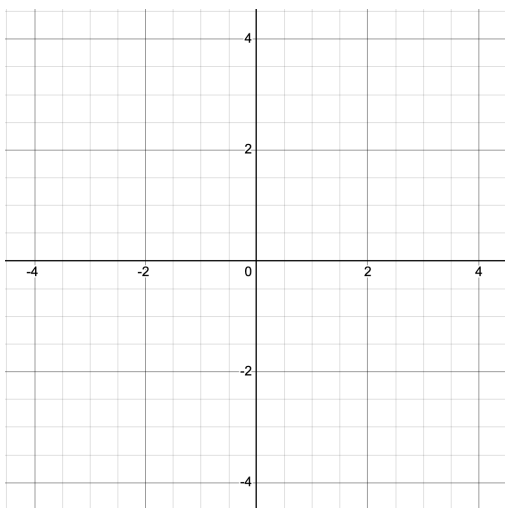
$$y = \sec(\theta)$$



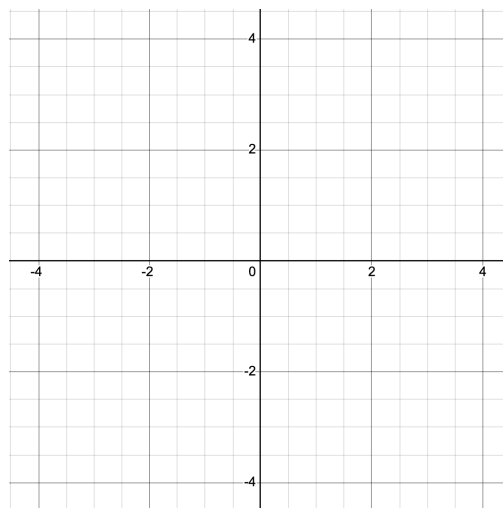
$$y = \cot(\theta)$$



$$y = \arcsin(\theta + \frac{\pi}{4}) + 1$$



$$y = \arccos(2\theta)$$



จากกราฟ เติมโดเมนและเรนจ์ของอินเวอร์สฟังก์ชัน

ฟังก์ชัน	โดเมน	เรนจ์
$\arcsin(\theta)$		
$\arccos(\theta)$		
$\arctan(\theta)$		
$\operatorname{arccsc}(\theta)$		
$\operatorname{arcsec}(\theta)$		
$\operatorname{arccot}(\theta)$		
$\arcsin(\theta + \frac{\pi}{4}) + 1$		
$\arccos(2\theta)$		

จากสมบัติอินเวอร์สฟังก์ชัน $(f \circ f^{-1})(x) = x$ ก็ต่อเมื่อ $x \in D_{f^{-1}}$ และ

$(f^{-1} \circ f)(x) = x$ ก็ต่อเมื่อ $x \in D_f$ หาค่าอินเวอร์สตรีโกณต่อไปนี้

1. $\arcsin(0)$

2. $\arccos(\frac{1}{2})$

3. $\arctan(\frac{1}{\sqrt{3}})$

4. $\operatorname{arccot}(\sqrt{3})$

5. $\operatorname{arccsc}(\frac{2}{\sqrt{3}})$

6. $\operatorname{arcsec}(2)$

7. $\sin(\arcsin(\frac{1}{2}))$

8. $\cos(\arccos(\frac{\sqrt{3}}{2}))$

9. $\cos(\arccos(\frac{1}{2}))$

สมบัติ arc มุมลบ

สมบัติ arc มุมลบ

$$\arcsin(-\theta) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\arccos(-\theta) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\arctan(-\theta) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\operatorname{arccsc}(-\theta) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\operatorname{arcsec}(-\theta) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\operatorname{arccot}(-\theta) = \underline{\hspace{2cm}}$$

ใช้สมบัติ arc มุมลบ หาค่าอินเวอร์สตรีโกณต่อไปนี้

1. $\arcsin(-1)$

2. $\arccos(-\frac{1}{2})$

3. $\arctan(-\frac{1}{\sqrt{3}})$

4. $\operatorname{arccot}(-\sqrt{3})$

5. $\operatorname{arccsc}(-\frac{2}{\sqrt{3}})$

6. $\operatorname{arcsec}(-2)$

7. $\sin(\arccos(-\frac{1}{2}))$

8. $\cos(\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2}))$

9. $\tan(\operatorname{arcsec}(-2))$

สมบัติของ $\arctan$

สมบัติของ $\arctan$

พิจารณาจากสูตร $\tan(\alpha + \beta)$ โดยแทน $\alpha = \arctan(A)$ และ $\beta = \arctan(B)$ และ
พิจารณาถึงเรขาคณิตจะได้ว่า

$$\arctan(A) + \arctan(B) =$$

ใช้สมบัติการยุบ $\arctan$ เพื่อให้เป็นรูปอย่างง่าย

1. $\arccos \frac{12}{13} + \arctan \frac{1}{4}$

2. $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{8}$

$$3. \frac{\arctan 1 + \arctan 2 + \arctan 3}{\arctan 1 + \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}}$$

$$4. \cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}\right)$$

แก้สมการอินเวอร์สตรีโกณ

แก้สมการอินเวอร์สตรีโกณ

Step1 : Take ฟังก์ชันตรีโกณทั้ง 2 ข้าง

Step2 : เปลี่ยน arc ให้ตรงกับฟังก์ชันที่ take

Step3 : แก้สมการ

Step4 : ตรวจสอบคำตอบ

หาค่าของ x ต่อไปนี้

1. $\arccos 2x - \arccos x = \frac{\pi}{3}$

2. $\arcsin x + \arcsin(1 - x) = \arccos(x)$

3. $\arctan(x + 1) + \arctan(x - 1) = \frac{\pi}{4}$

4. $\arccos(9x^2) + \arcsin(6x - 1) = \frac{\pi}{2}$

5. $\cos(2\arcsin x) + 2 = 4\sin^2(\arccos x)$

6. $\operatorname{arccot} \frac{1}{2x} + \operatorname{arccot} \frac{1}{3x} = \frac{\pi}{4}$

โจทย์ท้าทาย

โจทย์ท้าทาย

1. ให้ $|\theta| \in [0, \frac{\pi}{2}]$ หาค่ามากที่สุดและน้อยที่สุดที่เป็นไปได้ของ $\sin\theta + \cos\theta$

2. ให้ α, β เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $\sin\alpha + \sin\beta = 1$ และ $\cos\alpha + \cos\beta = \frac{1}{2}$ หาค่าของ $\cos 2\alpha + \cos 2\beta$

3. ให้ α, β เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $\sin\alpha + \sin\beta = 1$ และ $\cos\alpha + \cos\beta = \frac{1}{2}$ หาค่าของ $\sin 2\alpha + \sin 2\beta$

4. จงหาค่าของ $\frac{\tan 20^\circ + 4 \sin 20^\circ}{\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ}$

5. ถ้าจัดรูป $\cos 5\theta = a\cos^5\theta + b\cos^3\theta + c\cos\theta$ เมื่อ θ เป็นจำนวนจริงใดๆ หาค่าของ $a^2 + b^2 + c^2$

6. ให้ $\sin 5^\circ = k$ จักรูป $\cos 5^\circ + \cos 15^\circ + \cos 35^\circ + \sin 35^\circ + \sin 45^\circ + \sin 65^\circ$ ในรูปของ k

7. จัดรูป $\frac{\sin A + \sin 2A + \sin 4A + \sin 5A}{\cos A + \cos 2A + \cos 4A + \cos 5A}$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

8. จัดรูป $\left(\frac{1}{\sec^2 A} - \frac{1}{\csc^2 A}\right)^2 - \frac{4}{3}(\sin^6 A + \cos^6 A)$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

9. ให้ $\cot A - \cot B = \frac{9}{4}$ และ $\sin(\frac{2\pi}{3} + A)\cos(\frac{5\pi}{6} + B) +$

$$\cos(\frac{2\pi}{3} + A)\sin(\frac{5\pi}{6} + B) = \cos A \cos B$$

จงหาค่าของ $\cot(A - B)$

10. ให้ A, B เป็นจำนวนจริง $\sin A + \sin B = \frac{\sqrt{6}}{2}$ และ

$$\cos A + \cos B = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ หาค่าของ } \sin(A + B)$$

11. หาผลบวกคำตอบของ $\sum_{n=1}^{1270} \cos(2n - 1)x = 0$ ในช่วง $[0, \pi]$

12. หาจำนวนคำตอบในช่วง $[-\pi, \pi]$ ของสมการ $\sin x = 10\sin 10x$

13. หาจำนวนคำตอบในช่วง $[0, \frac{\pi}{2}]$ ของสมการ

$$\cos(x)\cos(2x)\cos(4x)\cos(8x) = \frac{1}{16}$$

14. หาจำนวนคำตอบในช่วง $[-\pi, \pi]$ ของสมการ

$$\tan x = \tan(x + 10^\circ)\tan(x + 20^\circ)\tan(x + 30^\circ)$$

15. หาจำนวนคำตอบในช่วง $[0, 1000\pi]$ ของสมการ $\cos x = \cos\left(\frac{x}{4}\right)$

16. ให้ α, β เป็นคำตอบของสมการ $\frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{1 - \cot \frac{x}{2}} + \frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{1 - \tan \frac{x}{2}} = \frac{3\cos 2x + 6}{10}$

โดยที่ $\frac{\pi}{2} < \alpha < \beta < \frac{3\pi}{2}$ จงหาค่าของ $\cot(\alpha - \beta)$