เมทริกซ์

เมทริกซ์ คืออะไร

การนำเสนอข้อมูลโดยใช้ตารางก็คือวิธีหนึ่งในการนำเสนอข้อมูลและจัดการข้อมูล โดยเราจะนำข้อมูลที่อยู่ในรูปตารางมาเขียนให้อยู่ภายใต้วงเล็บ [ ] และเราจะเรียกว่าเมทริกซ์

ตัวอย่าง มีข้อมูล

	คะแนนวิชา1	คะแนนวิชา2	คะแนนวิชา3
A	20	30	40
B	6	9	42
C	1	2	3

สามารถแสดงข้อมูลในรูปแบบเมทริกในรูปแบบ $\begin{bmatrix} 20 & 30 & 40 \\ 6 & 9 & 42 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

ส่วนประกอบของเมทริกซ์

กำหนดเมทริกตัวอย่าง ขนาด หรือ มิติ mxn

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ชุดของสมาชิกที่เขียนในแนวนอน เรียกว่า แถว (row) ของเมทริกซ์ ซึ่งมีทั้งหมด m แถว

ชุดของสมาชิกที่เขียนในแนวตั้ง เรียกว่า หลัก (column) ของเมทริกซ์ ซึ่งมีทั้งหมด n หลัก

เรียก a_{ij} ว่าเป็น สมาชิกในแถวที่ i และหลักที่ j ของเมทริกซ์

จงทำความคุ้นเคยกับการใช้เมทริกด้วยการแก้โจทย์ต่อไปนี้

1. จากเมทริกซ์ $B = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 0 & -5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ จงบอกขนาดของเมทริกซ์ และสมาชิกที่ตำแหน่ง b_{31} คือจำนวนใด

ขนาด 3x2

$b_{31} = -2$

2. จากเมทริกซ์ $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 7 & -3 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ จงบอกขนาดของเมทริกซ์ และอธิบายค่าของสมาชิกทุกตำแหน่ง

ขนาด 3x3

$b_{11} = 1$ $b_{12} = 3$ $b_{13} = 6$

$b_{21} = 0$ $b_{22} = 7$ $b_{23} = -3$

$b_{31} = -1$ $b_{32} = 5$ $b_{33} = 2$

3. ถ้า A มีสมาชิก a_{ij} โดยที่ $a_{ij} = 2i + j$ และ A เป็นเมทริกซ์ขนาด 2x3 จงหาเมทริกซ์ A

$\begin{bmatrix} 2(1)+1 & 2(1)+2 & 2(1)+3 \\ 2(2)+1 & 2(2)+2 & 2(2)+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

4. ถ้า A มีสมาชิก a_{ij} โดยที่ $a_{ij} = ij + 5i$ และ A เป็นเมทริกซ์ขนาด 4x2 จงหาเมทริกซ์

$a_{ij} = i(j+5)$

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 12 & 14 \\ 18 & 21 \\ 24 & 28 \end{bmatrix}$

การเท่ากันของเมทริกซ์

เมทริกซ์สองเมทริกซ์จะเท่ากันได้ต้องมีมิติเหมือนกัน และข้อมูลทุกตัวในตำแหน่งเดียวกันเท่ากันทุกตำแหน่ง

ตัวอย่างในการใช้

ถ้า A = B โดยที่ A = $\begin{bmatrix} x+1 \\ 5 \end{bmatrix}$ และ B = $\begin{bmatrix} 4 \\ y \end{bmatrix}$ จงหาค่า x และ y

จาก A = B ได้ว่า $a_{11} = b_{11}$ และ $a_{21} = b_{21}$

จาก $a_{11} = b_{11}$ ได้ว่า x=3

จาก $a_{21} = b_{21}$ ได้ว่า y=5

จงใช้การเท่ากันของเมทริกซ์หาค่าต่างๆต่อไปนี้

1. $A = \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ จงหาค่าของ x และ y

$\begin{cases} x+y=1 & \text{---①} \\ x-y=5 & \text{---②} \end{cases}$

$\frac{①+②}{2}$: $x=3$ → $y=-2$

2. $A = \begin{bmatrix} x+2y & -1 & x-3z \\ 2 & 0 & y-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 4 \\ y & 0 & 1 \end{bmatrix}$ จงหาค่าของ x, y และ z

$\begin{cases} x+2y=5 \\ x-3z=4 \\ y=2 \\ y-1=1 \end{cases}$

ได้ว่า $y=2$ แทนใน $x+2y=5$ ได้ $x=1$

แทน $x=1$ ใน $x-3z=4$ $z=-1$

$(x,y,z) = (1,2,-1)$

3. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y & z \\ w & 3 \end{bmatrix}$ จงหาค่าของ x+z+w+y

$$\begin{cases} x+y=2 \\ z=-1 \\ w=0 \end{cases}$$

$x+y+w+z = 1$

4. $\begin{bmatrix} 3\cdot 5^a & 3b \\ 3\cdot 2^c & 3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5^a+4 & 5^a+b+6 \\ 2^c+d-1 & 2d+3 \end{bmatrix}$ จงหาค่าของ b+c

$$\begin{cases} 3\cdot 5^a = 5^a+4 \longrightarrow 5^a = 2 \\ 3b = 5^a+b+6 \longrightarrow 3b = 8+b \rightarrow b=4 \\ 3d = 2d+3 \longrightarrow d=3 \\ 3\cdot 2^c = 2^c+d-1 \longrightarrow 2\cdot 2^c = 3-1 \rightarrow c=0 \end{cases}$$

$\therefore b+c = 4+0 = 4$

พีชคณิตเชิงเมทริกซ์

การบวกและการลบเมทริกซ์

ให้ A และ B เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาดเท่ากัน จะได้ว่า C = A+B โดยที่ $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ สำหรับทุก $i \in \{1,2,3,\dots,m\}$ และ $j \in \{1,2,3,\dots,n\}$

จงบวกลบเมทริกซ์ต่อไปนี้

1. ให้ A = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ และ B = $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ จงหา A + B

$A+B = \begin{bmatrix} 2-1 & 1+0 \\ -3+5 & 4+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

2. ให้ A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ และ B = $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ จงหา A – B

$A-B = \begin{bmatrix} 1-0 & 2-1 \\ 3-1 & 4-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

3. ให้ A = $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ และ B = $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ จงหา A – B

$A-B = \begin{bmatrix} 2-0 & -1-1 & 0-1 \\ 3-4 & 5-(-2) & 1-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 7 & -2 \end{bmatrix}$

การคูณเมทริกซ์ด้วยจำนวนจริง

ให้นำจำนวนจริงนั้น คูณสมาชิกทุกตัวในเมทริกซ์

หรือเขียนเป็นนิยามได้ว่า กำหนดให้ B=cA เมื่อ A เป็นเมทริกซ์ และ c เป็นค่าลงที่ โดยที่ $b_{ij} = c \cdot a_{ij}$ สำหรับทุก $i \in \{1,2,3, \dots, m\}$ และ $j \in \{1,2,3, \dots, n\}$

จงหาผลคูณเมทริกซ์ด้วยค่าคงที่ต่อไปนี้

1. ให้ B = $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ จงหา 3B

$3B = \begin{bmatrix} 3\cdot 0 & 3\cdot 1 \\ 3\cdot 1 & 3\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

2. ถ้า $A = [3 \quad -1]$ และ $B = [0 \quad 2]$ จงหาค่าของ 2A - 3B

$2A - 3B = \begin{bmatrix} 2(3) - 3(0) & 2(-1) - 3(2) \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 6 & -8 \end{bmatrix}$

3. ถ้า $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ จงหาค่าของ 3A+2B

$3A + 2B = \begin{bmatrix} 3(2) + 2(-1) & 3(1) + 2(0) \\ 3(-3) + 2(5) & 3(4) + 2(2) \end{bmatrix}$

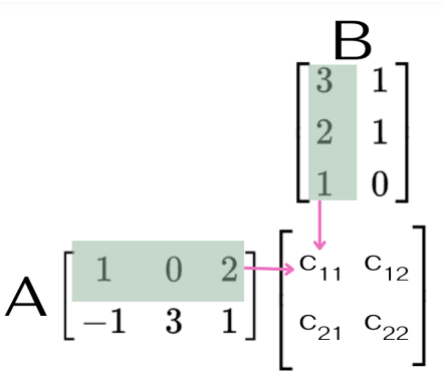
$= \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 16 \end{bmatrix}$

การคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์

ให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด mxn และ ให้ B เป็นเมทริกซ์ขนาด pxq

ผลคูณของเมทริกซ์ A และ B เขียนแทนด้วย AB จะนิยามได้ ก็ต่อเมื่อ n=p และเมทริกซ์ผลคูณ AB จะมีขนาด mxq ซึ่งมีสมาชิกในแถวที่ I และหลักที่ j เป็น $a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$

สำหรับทุก $i \in \{1,2,3,\ldots,m\}$ และ $j \in \{1,2,3,\ldots,q\}$



จากรูปจะหา C = AB จะได้ c_{11} คือ $1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 5$ ส่วนค่าเมทริกซ์ C ตัวอื่นๆทำในทำนองเดียวกัน

[$AB \neq BA$ ไม่มีสมบัติการสลับที่]

จงใช้การคูณเมทริกซ์หาค่าต่อไปนี้

1. จงหา AB เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$

$c_{11} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 7$

$c_{12} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 = 10$

$c_{21} = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 = 15$

$c_{22} = 2 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 22$

$AB = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}$

2. จงหา AB เมื่อ $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$AB = \begin{bmatrix} -1\cdot 1 + 1\cdot 0 & -1\cdot 0 + 1\cdot 1 \\ 3\cdot 1 + (-4)\cdot 0 & 3\cdot 0 + (-4)\cdot 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

3. จงหา AB เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$AB = \begin{bmatrix} 2\cdot 1 + 5\cdot 0 & 2\cdot 0 + 5\cdot 1 \\ 3\cdot 1 + 7\cdot 0 & 3\cdot 0 + 7\cdot 1 \end{bmatrix}$

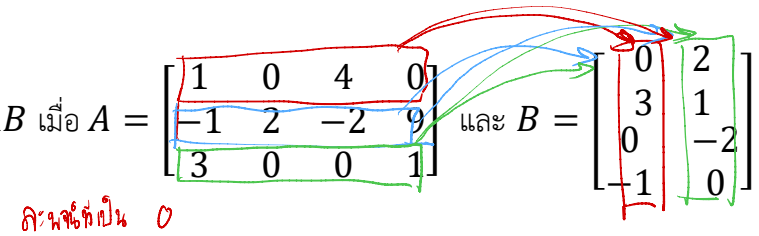
$= \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$

4. จงหา AB เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

1 2

$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

5. จงหา AB เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 9 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$



สมาชิกที่เป็น 0

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1\cdot 2 + 4(-2) \\ 2\cdot 3 + 9(-1) & (-1)\cdot 2 + 2\cdot 1 + (-2)(-2) \\ 1\cdot(-1) & 3\cdot 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -3 & 4 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$$

6. หา AB เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 3 & 1 \\ 9 & -2 \\ -6 & 9 \end{bmatrix}$

สมาชิกที่เป็น 0

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 9 & -2 \\ -6 & 9 \end{bmatrix}$$

การดำเนินการของเมทริกซ์

เมทริกซ์สลับเปลี่ยน (transpose)

ให้ $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{n\times m}$ โดยที่ $b_{ij} = a_{ji}$

สำหรับทุก $i \in \{1,2,3,\dots,n\}$ และ $j \in \{1,2,3,\dots,m\}$

เรียก B ว่า เมทริกซ์สลับเปลี่ยน (transpose) ของ A เขียนแทนด้วย A^t

และมีสมบัติของ transpose เมทริกซ์

- $(A^t)^t = A$
- $(cA)^t = c(A^t)$
- $(A + B)^t = (A^t) + (B^t)$
- $(A\ B)^t = B^tA^t$

จงใช้เมทริกซ์สลับเปลี่ยนหาค่าต่อไปนี้

1. ถ้า $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ จงหา C^t

$C^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. ถ้า $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \end{bmatrix}$ จงหาค่าและมิติของ C^t

$C^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

มิติ 3×2

3. ถ้า $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ จงหา $(5C)^t$

$(5C)^t = 5C^t = 5\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

4. ถ้า $A = \begin{bmatrix} x & 3-x \\ x & 3 \end{bmatrix}$ จงหาค่า x เมื่อ $A + A^t = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

$A + A^t = \begin{bmatrix} x & 3-x \\ x & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & x \\ 3-x & 3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2x & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

$2x = 4$

$x = 2$

5. ถ้า $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ จงหาเมทริกซ์ B ที่ทำให้ $A = (2B)^t$

$(A)^t = ((2B)^t)^t$

$A^t = 2B$

$B = \frac{1}{2} \cdot A^t = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์

ใช้สัญลักษณ์ $det(A)$ หรือ $|A|$ โดยหาได้เฉพาะเมทริกซ์จัตุรัส หรือเมทริกซ์ที่มีแถวและหลักเป็นจำนวนเท่ากัน

ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ที่มีขนาด 2 x 2

ให้ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ จะได้ ดีเทอร์มิแนนต์ของ A คือ ad–bc

จงใช้การหาค่าของดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ที่มีขนาด 2 x 2 ในการแก้โจทย์ต่อไปนี้

1. หา $det(A)$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$det(A) = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$

2. หา $det(A)$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$det(A) = 2 \cdot 2 - 0 \cdot 0$

$= 4$

3. จงหา $det(2A)$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

$$\det(2A) = \det\left(\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}\right)$$
$$= 20$$

4. จงหา $det(3A^t)$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$

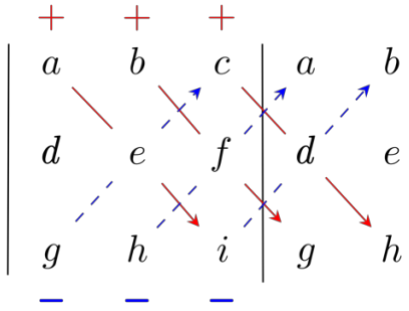
$$\det(3A^t) = \det\left(3\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}\right)$$
$$= \det\left(\begin{bmatrix} 3\cdot 6 & 3\cdot 6 \\ 3\cdot 7 & 3\cdot 9 \end{bmatrix}\right)$$
$$= 3\cdot 3\cdot 6\cdot 9 - 3\cdot 3\cdot 6\cdot 7$$
$$= 3^2\cdot 6\cdot 2$$
$$= 108$$

5. ถ้า $A = \begin{bmatrix} x+1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ และ $det(2A) = 24$ จงหาค่า x

$$\det(2A) = 24$$
$$2^2\cdot\det(A) = 24$$
$$\det(A) = 6$$
$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4(x+1) - 2 = 6$$
$$x+1 = 2$$
$$x = 1$$

ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ที่มีขนาด 3x3

หนึ่งในวิธีที่สามารถทำได้คือใช้ กฎของซาร์รัส โดยการต่อหลักที่ 1 และ 2 ลากเส้นทแยงมุมเพื่อคำนวณผลคูณบวกและลบ



ดีเทอร์มิแนนต์ = (aei + bfg + cdh) – (gec + hfa + idb)

จงใช้การหาค่าของดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ที่มีขนาด 3 x 3 ในการแก้โจทย์ต่อไปนี้

1. หาค่าของ $det(A)$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

สมาชิกที่เป็น 0

$det(A) = 2 \cdot 4 \cdot 3$

$= 24$

2. หาค่าของ $det(A)$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$det(A) = 2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$

3. หาค่าของ $det(A)$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ X & 4 & 0 \\ X & X & 3 \end{bmatrix}$ โดย X เป็นค่าอะไรก็ได้ในเซตของจำนวนจริง

$det(A) = 2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$

4. หาค่าของ $det(A)$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

$det(A) = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 - 3 \cdot 5 \cdot 7 - 8 \cdot 6 - 9 \cdot 4 \cdot 2$

$= 45 + 84 + 96 - 105 - 48 - 72$

$= 0$

5. หาค่าของ $det(A)$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

$det(A) = 1 \cdot 2 \cdot 9 + 1 \cdot 2 \cdot 7 + 1 \cdot 2 \cdot 8 - 1 \cdot 2 \cdot 7 - 1 \cdot 2 \cdot 8 - 1 \cdot 2 \cdot 9$

$= 0$

จากการหา det ข้างต้นสามารถใช้หาได้แค่ 2 x 2 และ 3 x 3 เท่านั้น

โดยขนาดใด ๆ สามารถหา det ด้วยการดำเนินการตามแนวเมทริกซ์ (Row Operations) ใช้ได้เพราะคือ การแปลงสมการเชิงเส้นให้อยู่ในรูปแบบที่ง่ายขึ้นเพื่อหาคำตอบ โดยไม่เปลี่ยนแปลงความสัมพันธ์ของสมการเดิม จากที่เคยทำไปข้างต้น จะเห็นได้ว่ามีสมบัติของ det

โดยเมทริก $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ เรียกว่าเมทริกซ์ทแยงมุม ซึ่งมี det เท่ากับผลคูณของเส้นทแยงมุม

โดยเมทริก $\begin{bmatrix} 2 & X & X \\ 0 & 4 & X \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ เรียกว่าเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน ซึ่งมี det เท่ากับผลคูณของเส้นทแยงมุม

โดยเมทริก $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ X & 4 & 0 \\ X & X & 3 \end{bmatrix}$ เรียกว่าเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง ซึ่งมี det เท่ากับผลคูณของเส้นทแยงมุม

และ เมทริก $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ X & X & X \\ X & X & X \end{bmatrix}$ มี det = 0 หรือจะมองได้จากการที่มี 2 สมการ กับ 3 ตัวแปรจะไม่สามารถหาค่าในค่าคงที่ทั้ง 3 ตัวแปรได้ หรือมีคำตอบเป็นอนันต์ / ไม่มีคำตอบ

โดยจะทำการดำเนินการตามแนวกับเมทริกที่ต้องหารหา det ให้เหลือสามเหลี่ยมบน หรือสามเหลี่ยมล่าง ซึ่งจะมีการดำเนินการดังนี้

1. สลับแถวที่ i กับแถวที่ j (เขียนแทนด้วย $R_i \leftrightarrow R_j$)
2. เปลี่ยนแถวที่ i โดยนำค่าคงตัว c คูณกับแถวที่ j แล้วบวกกับแถวที่ i ($R_i \rightarrow R_i + cR_j$)
3. คูณแถวที่ i ด้วยค่าคงตัว c ($R_i \rightarrow cR_i$)

[หมายเหตุ: ค่า det วิธีที่1 จะติดลบ, วิธีที่ 2 ไม่เปลี่ยนแปลง, วิธีที่ 3 det มีค่าเป็น c เท่าของเดิม]

จงใช้การดำเนินตามแถวในการหาค่า det ต่อไปนี้

1. หาค่าของ $det(A)$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} -9 & -7 & -5 \\ -3 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} -9 & -7 & -5 \\ -3 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -10 & -14 \\ -3 & 1 & 3 \\ -1 & 9 & 15 \end{vmatrix} \quad R_3 \to R_3 + 2R_2 \ , \ R_1 \to R_1 - 3R_2$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -9 & -15 \\ -3 & 1 & 3 \\ 0 & -10 & -14 \end{vmatrix} \quad R_1 \leftrightarrow R_3 \ , \ R_1 \to -R_1$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -9 & -15 \\ 0 & -26 & -42 \\ 0 & -10 & -14 \end{vmatrix} \quad R_2 \to R_2 + 3R_1$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -9 & -15 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -10 & -14 \end{vmatrix} \quad R_2 \to R_2 - 3R_3$$

$$\det(A) = 1 \cdot 4 \cdot (-14) = -56$$

2. หาค่าของ $det(A)$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \quad R_2 \to R_2 - 2R_1 \ , \ R_3 \to R_3 - R_1$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \quad R_3 \to R_3 + R_2$$

$$= -2$$

3. หาค่าของ $det(A)$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -9 & -3 \end{vmatrix} \quad R_2 \to R_2 - 2R_1, \; R_3 \to R_3 - 4R_1$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} \quad R_3 \to R_3 - 3R_2$$

$$= 18$$

4. หาค่าของ $det(A)$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 1 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 1 \end{vmatrix} \quad R_2 \to R_2 - 4R_1, \; R_3 \to R_3 - 7R_1$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -20 \end{vmatrix} \quad R_3 \to R_3 - 2R_2$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -8 \end{vmatrix}$$

$$= 24$$

การหา det ในมิติจัตุรัสใด ๆ มิติ k x k ด้วยโคแฟคเตอร์ด้วยสูตร

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{k} a_{ij}C_{ij}$$

โดย C_{ij} คือโคแฟกเตอร์ในแถวที่ I หลักที่ j และมีสูตรในการหาคือ

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$$

โดย M_{ij} คือการหา Minor ของเมทริกซ์ในแถวที่ I หลักที่ j ซึ่งหาได้จากการหา det หลังจากการลบข้อมูลในแถวที่ I และหลักที่ j ออก

ตัวอย่างการหา det

กำหนดให้ต้องการหา det ของ $\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$

ทำได้โดยการเลือกแถวหรือหลัก 1 แถว [ถ้าเลือกแถวที่มี 0 มากจะคิดเลขง่าย] -> เลือกหลักที่ 3

จากนั้น $\det(A) = a_{13}C_{13} + a_{23}C_{23} + a_{33}C_{33} = 1 \times C_{13} + 0 \times C_{23} + 1 \times C_{33}$

พิจารณาหา C_{13} ได้จาก $(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix} = -3$

พิจารณาหา C_{33} ได้จาก $(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix} = 1$

$\det(A) = C_{13} + C_{33} = -3 + 1 = -2$

จงใช้ความรู้เรื่อง Minor, Cofactor และ det ในการหาค่าต่อไปนี้

1. หาค่าของ $det(A)$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}$

$\det(A) = a_{31}\cdot C_{31} + a_{32}\cdot C_{32} + a_{33}\cdot C_{33}$

$= 2 \cdot (-1)^{3+2}\cdot \begin{vmatrix}1 & 3\\ 4 & 6\end{vmatrix}$

$= -2(6-12)$

$= 12$

2. หาค่าของ x^2 เมื่อ $A = \begin{bmatrix} x & 2 & x \\ 1 & x & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ และ $det(A) = 16$

$det(A) = det(A^T) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 2 & x & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ $R_3 \to R_3 - R_1$

$= 2 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} x & 1 \\ 2 & x \end{vmatrix}$

$16 = 2(x^2 - 2)$

$x^2 = 10$

3. ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ หาค่าของ $a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12}$

$a_{11}C_{11} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}$

$= 3 \cdot 7 - 4 \cdot 6$

$= -3$

4. ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ หาค่าของ $C_{11} + C_{22}M_{33}$

$C_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 21$

$C_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 7$

$M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$

$C_{11} + C_{22}M_{33} = 21 + 21 = 42$

5. ให้ $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ หาค่าของ $a_{13}C_{13} + a_{23}C_{23} + a_{33}C_{33}$

$a_{13}C_{13} + a_{23}C_{23} + a_{33}C_{33} = a_{13}C_{13} + a_{23}C_{23} + a_{33}C_{33} + 0C_{43}$

$= \det(A)$

$= 5 \cdot (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

$= 10$

เมทริกซ์ผูกพัน (adjoint metrix)

คือ ทรานสโพสของเมทริกซ์โคแฟกเตอร์ เขียนได้ในรูป $adj(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}^t$

สมบัติของแอดจอยต์ $A(adj(A)) = (adj(A))A = det(A)(I)$

จงหาค่า $adj(A)$ จากเมทริกซ์ A ต่อไปนี้

1. จงหาค่า $adj(A)$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$$adj(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}^t$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

2. จงหาค่า $adj(A)$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$adj(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}^t$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

3. จงหาค่า $adj(A)$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}$

$$adj(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 2 & -28 & 17 \\ -5 & 10 & -5 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}^t$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -5 & -1 \\ -28 & 10 & -1 \\ 17 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

4. จงหาค่า $adj(A)$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$$adj(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -7 & -4 & 5 \\ -11 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & -11 \end{bmatrix}^t$$

$$= \begin{bmatrix} -7 & -11 & 1 \\ -4 & 4 & 4 \\ 5 & 1 & -11 \end{bmatrix}$$

5. จงหาค่า $adj(A)$ และ $A\big(adj(A)\big)$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

$$adj(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -17 & 9 & 3 \\ 2 & -6 & -2 \\ -8 & -4 & 8 \end{bmatrix}^t$$

$$= \begin{bmatrix} -17 & 2 & -8 \\ 9 & -6 & -4 \\ 3 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A\,adj(A) = \begin{bmatrix} -28 & 0 & 0 \\ 0 & -28 & 0 \\ 0 & 0 & -28 \end{bmatrix}$$

6. จงหาค่า $det(adj(A))$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$$adj(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -7 & -4 & 5 \\ -11 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & -11 \end{bmatrix}^t$$

$$= \begin{bmatrix} -7 & -11 & 1 \\ -4 & 4 & 4 \\ 5 & 1 & -11 \end{bmatrix}$$

$$det(adj(A)) = 576$$

อินเวอร์สการคูณสเมทริกซ์ ของเมทริกซ์มิติ n x n

หาได้จาก $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(adj(A))$

โดยจะไม่มีอินเวอร์สเมื่อ $|A| = 0$

จงใช้การหาอินเวอร์สในการแก้โจทย์ต่อไปนี้

1. จงหาค่า A^{-1} เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$

$adj(A) = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$|A| = 1\cdot(-5) - (-2)(3) = 1$

$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(adj(A)) = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

2. จงหาค่า A^{-1} เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

$adj(A) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

$|A| = 1\cdot 2 - (-1)(3) = 5$

$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

3. จงหาค่า A^{-1} เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

$adj(A) = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ 8 & -2 & 4 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 10 & -2 & 8 \\ 5 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

$|A| = 20$

$A^{-1} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 10 & -2 & 8 \\ 5 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

4. จงหาค่า A^{-1} เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ +6 -12

$adj(A) = \begin{bmatrix} -9 & 0 & 0 \\ -12 & 6 & 0 \\ -6 & 6 & -6 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -9 & -12 & -6 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$

$|A| = -18$

$A^{-1} = \frac{1}{-18}\begin{bmatrix} -9 & -12 & -6 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

5. จงหาค่า A^{-1} และ $det(A^{-1})$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

$$adj(A) = \begin{bmatrix} -12 & -1 & 8 \\ 0 & -2 & 0 \\ -8 & -4 & 8 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -12 & 0 & -8 \\ -1 & -2 & -4 \\ 8 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 4 \cdot (-1)^{2+2}(-2) = -8$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{8}\begin{bmatrix} -12 & 0 & -8 \\ -1 & -2 & -4 \\ 8 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$det(A^{-1}) = \left(-\frac{1}{8}\right)^3 \cdot (-2) \cdot (-1)^{2+2} \cdot (-12 \cdot 8 + 8 \cdot 8)$$

$$= \left(-\frac{1}{8}\right)^3 \cdot (-8)^2$$

$$= -\frac{1}{8}$$

6. ให้ $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ และ $A^{-1}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ จงหา a+b+c

$$A \cdot A^{-1}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9+4+1 \\ 0-4+0 \\ 15-2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -4 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$a+b+c = 22$$

สมบัติของ det ที่ควรรู้

- $det(A^t) = det(A)$
- $det(AB) = det(A)det(B)$
- $det(A^n) = det(A)^n$
- $det(A^{-1}) = det(A)^{-1}$
- $det(cA) = c^n det(A)$ เมื่อ n เป็นมิติของเมทริกซ์ nxn
- $det(adj(A)) = det(A)^{n-1}$
- $det(adj(adj(A))) = det(A)^{(n-1)^2}$

จงใช้สมบัติของ det ในการหาค่าต่อไปนี้

1. ถ้า A เป็นเมทริกซ์ 2 x 2 และ det(A) = 3 จงหา $det(A^t)$

$det(A^t) = det(A) = 3$

2. ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์ 2 x 2 และ det(A) = 3, det(B) = 4 จงหา det(AB)

$det(AB) = det(A)\,det(B)$

$= 3 \cdot 4$

$= 12$

3. ถ้า A เป็นเมทริกซ์ 2 x 2 และ det(A) = 5 จงหา $det(5A^{-1})$

$$\det(5A^{-1}) = 5^2 \det(A^{-1})$$
$$= 5^2 \cdot \frac{1}{\det(A)}$$
$$= 5$$

4. ถ้า A เป็นเมทริกซ์ 2 x 2 และ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ จงหา det(adj(A))

$$\det(\text{adj}(A)) = (\det(A))^{n-1}$$
$$= ((1\cdot 2) - (3\times -1))^{2-1}$$
$$= 5$$

5. ถ้า A เป็นเมทริกซ์ 2 x 2 และ $det(A^3) = 8$ จงหา det(A)

$$(\det(A))^3 = 8$$
$$\det(A) = 2$$

6. ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์ 2 x 2 และ det(A) = 6, $det(B^{-1}) = \frac{1}{3}$ จงหา det(AB)

$\det(AB) = \det(A)\det(B)$

$= 6 \cdot \frac{1}{\det(B^{-1})}$

$= 18$

7. ถ้า A เป็นเมทริกซ์ที่ทำให้ det(A) = 0 จงหา $det(A^{-1})$

จาก $\det(A) = 0$ ได้ว่าไม่มี A^{-1}

8. ถ้า A เป็นเมทริกซ์ 2 x 2 และ det(A) = 5 จงหา $det((2A)^{-1})$

$\det((2A)^{-1}) = \frac{1}{\det(2A)} = \frac{1}{2^2 \cdot \det(A)} = \frac{1}{20}$

9. ถ้า A เป็นเมทริกซ์ 3 x 3 และ det(A) = x จงหา det(xA)

$\det(xA) = x^3 \det(A)$

$= x^4$

10. ถ้า A เป็นเมทริกซ์ 2 x 2 และ det(adj(A)) = 9 จงหา $det(A^2)$

$\det(\text{adj}(A)) = (\det(A))^{n-1} = 9$

$\det(A) = 9$

$\det(A^2) = (\det(A))^2$

$= 81$

11. ถ้า A เป็นเมทริกซ์ 3 x 3 และ det(A) = 3 จงหา $det(A^2 + A^2)$

$\det(A^2 + A^2) = \det(2A^2)$

$= 2^3 \cdot \det(A^2)$

$= 2^3 \cdot (\det(A))^2$

$= 72$

12. ถ้า A เป็นเมทริกซ์ 3 x 3 และ det(adj(A)) = 49 จงหา $det((A^{-1})^t)$

$$\det(\text{adj}(A)) = (\det(A))^{n-1} = 49$$
$$(\det(A))^2 = 49$$
$$\det(A) = \pm 7$$
$$\det((A^{-1})^t) = \det(A^{-1})$$
$$= \frac{1}{\det(A)}$$
$$= \pm\frac{1}{7}$$

13. ถ้า A เป็นเมทริกซ์ 3 x 3 และ det(A) = 1/2 จงหา det(adj(adj(2A)))

$$\det(\text{adj}(\text{adj}(2A))) = (\det(2A))^{(n-1)^2}$$
$$= (2^3\det(A))^4$$
$$= 2^{12}\cdot(\tfrac{1}{2})^4$$
$$= 2^8$$

14. ถ้า A เป็นเมทริกซ์ 4 x 4 และ det(A) = 3 จงหา $det(adj(A^{-1}))^{-1}$

$$\det(\text{adj}(A^{-1}))^{-1} = \frac{1}{\det(\text{adj}(A^{-1}))} = \frac{1}{\det(A^{-1})^{4-1}}$$
$$= (\det(A))^3$$
$$= 27$$

แก้สมการเมทริกซ์

วิธีแก้สมการ

ทำเหมือนตอนแก้สมการแบบเก่า คือใช้วิธีดำเนินการด้วยอินเวอร์สทั้ง 2 ข้าง ให้เหลือ X แยกอยู่ตัวเดียว เนื่องจากเมทริกซ์สลับที่การคูณไม่ได้ดังนั้น ถ้าย้ายจากคูณซ้าย ก็ต้องไปคูณซ้าย ถ้าย้ายจากคูณขวา ก็ต้องไปคูณขวา และห้ามย้ายเมทริกซ์ที่คูณอยู่ตรงกลาง

ตัวอย่าง

$$AXB - C = D$$

$$AXB = C + D$$

$$X = A^{-1}(C + D)B^{-1}$$

จงแก้ระบบสมการเพื่อหาเมทริกซ์ที่ไม่ทราบค่าต่อไปนี้

1. $\begin{cases} 2A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} & \text{——} ① \\ 3A - B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 7 & -6 \end{bmatrix} & \text{——} ② \end{cases}$

① + ② : $5A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 10 & -10 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ แทนใน ①

$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

2. หา X ที่สอดคล้องกับสมการ $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + 4X = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + 4X = \begin{bmatrix} 2\cdot3+1\cdot1+(-2)(-3) & 2\cdot2+1\cdot4+(-2)1 \\ 0\cdot3+1\cdot1+3(-3) & 0\cdot2+1\cdot4+3\cdot1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + 4X = \begin{bmatrix} 13 & 4 \\ -8 & 7 \end{bmatrix}$

$4X = \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ -12 & 4 \end{bmatrix}$

$X = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 12 & 6 \\ -12 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

3. ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix}$ ถ้า $A^{-1}BA = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ แล้วจงหาค่าของ xyz

$|A| = -2$

$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$A^{-1}BA = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

$B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

$xyz = -3$

4. จงหาค่า X จากสมการ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 & 13 \\ 17 & 19 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 14 \\ 12 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 11 & 13 \\ 17 & 19 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -5 & -9 \end{bmatrix}$

$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -5 & -9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1}$

$= \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -5 & -9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

$= -\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 17 & 19 \\ 9 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

$= -\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 11 & -15 \\ 57 & -25 \end{bmatrix}$

เมทริกซ์แต่งเติม

อีกเทคนิคในการแก้สมการ AX = B โดยใช้เมทริกซ์แต่งเติม ซึ่งมีขั้นตอนดังนี้นำสมการเมทริกซ์ AX = B มาสร้างเมทริกซ์แต่งเติม ซึ่งมีรูปแบบคือ [A | B]

เช่น แก้สมการ $\begin{cases} -2x + 4y = 4 \\ x + 3y = 8 \end{cases}$

จะแปลงเป็นสมการเมทริกซ์ได้เป็น $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}$ และสร้างเมทริกซ์แต่งเติมได้เป็น

$$\left[\begin{array}{cc|c} -2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \end{array}\right]$$

และจะเปลี่ยนส่วนซ้ายในรูปเมทริกซ์ I โดยการดำเนินการตามแถว และได้คำตอบคือด้านขวา

$$\left[\begin{array}{cc|c} -2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 8 \end{array}\right] \quad R_1 \to \frac{R_1}{-2}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 5 & 10 \end{array}\right] \quad R_2 \to R_2 - R_1$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \quad R_2 \to \frac{R_2}{5}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \quad R_1 \to R_1 + 2R_2$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

จงใช้เมทริกซ์แต่งเติมในการหาค่าต่อไปนี้

1. $X\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 7 & -8 \end{bmatrix}$

หาอินเวอร์ส จาก $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

ได้ A^{-1} จาก $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{R_2 \to R_1 - 3R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & -3 & 1 \end{array}\right]$

$$\underset{\sim}{R_2 \to \frac{R_2}{-10}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{R_1 \to R_1 - 2R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{4}{10} & \frac{2}{10} \\ 0 & 1 & \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \end{array}\right]$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 7 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 2 & 16 \\ 4 & 22 \end{bmatrix}$$

2. $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$

ให้ X คือ $\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & -2 & 11 & 0 \\ 3 & -4 & 3 & 7 \end{array}\right] \overset{R_2 \to R_2 - R_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & -2 & 11 & 0 \\ 0 & -2 & -8 & 7 \end{array}\right]$

$\overset{R_1 \to R_1 - R_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 19 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & 7 \end{array}\right]$

$\overset{R_1 \to \frac{R_1}{3},\ R_2 \to \frac{R_2}{-2}}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{19}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & 1 & 4 & -\frac{7}{2} \end{array}\right]$

$\therefore X = \begin{bmatrix} \frac{19}{3} & -\frac{7}{3} \\ 4 & -\frac{7}{2} \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 4 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

ให้ X คือ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 0 & 4 \end{array}\right] \overset{\substack{R_2 \to R_2 - 3R_1 \\ R_3 \to R_3 - 4R_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 13 & -3 \\ 0 & 5 & 12 & -4 \end{array}\right]$

$\overset{R_2 \to \frac{R_2}{13},\ R_3 \to \frac{R_3}{5}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{13} \\ 0 & 1 & \frac{12}{5} & -\frac{4}{5} \end{array}\right]$

$\overset{R_2 \leftrightarrow R_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{12}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{13} \end{array}\right]$

$\overset{\substack{R_1 \to R_1 + 3R_3 \\ R_2 \to R_2 - \frac{12}{5}R_3}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{17}{13} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{16}{65} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{13} \end{array}\right]$

$\therefore X = \begin{bmatrix} \frac{17}{13} \\ -\frac{16}{65} \\ -\frac{3}{13} \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 3\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}3\\ 6\\ -6\end{bmatrix}$

X หาได้ดังนี้ $\left[\begin{array}{ccc|c}2&0&1&3\\1&1&-1&6\\0&-1&3&-6\end{array}\right] \overset{\substack{R_1\to R_1-2R_2\\ R_1\leftrightarrow R_2}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&6\\0&-2&3&-9\\0&-1&3&-6\end{array}\right] \overset{R_3\to R_3-R_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&6\\0&-2&3&-9\\0&1&0&3\end{array}\right]$

$\overset{\substack{R_1\to R_1-R_3\\ R_2\to R_2+2R_3}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&3\\0&0&3&-3\\0&1&0&3\end{array}\right] \overset{R_2\to \frac{R_2}{3}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&3\\0&0&1&-1\\0&1&0&3\end{array}\right] \overset{R_2\leftrightarrow R_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&3\\0&1&0&3\\0&0&1&-1\end{array}\right]$

$\overset{R_1\to R_1+R_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&2\\0&1&0&3\\0&0&1&-1\end{array}\right]$

$\therefore$ X คือ $\begin{bmatrix}2\\3\\-1\end{bmatrix}$

5. ให้ $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ -2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & -1\\ 1 & 4 & 0\end{bmatrix}$ และ $C=\begin{bmatrix}2\\ -2\\ 3\end{bmatrix}$ และ X เป็นเมทริกซ์ที่สอดคล้องกับ $AX=C$ จงหา $(2A+B)X$

X หาได้ดังนี้ $\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&1&2\\-2&0&1&-2\\0&1&2&3\end{array}\right] \overset{R_2\to R_2+2R_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c}1&2&1&2\\0&4&3&2\\0&1&2&3\end{array}\right] \overset{R_2\to R_2-4R_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c}1&2&1&2\\0&0&-5&-10\\0&1&2&3\end{array}\right]$

$\overset{R_2\to \frac{R_2}{-5}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c}1&2&1&2\\0&0&1&2\\0&1&2&3\end{array}\right] \overset{\substack{R_1\to R_1-R_2\\ R_3\to R_3-2R_2}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c}1&2&0&0\\0&0&1&2\\0&1&0&-1\end{array}\right] \overset{R_1\to R_1-2R_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&2\\0&0&1&2\\0&1&0&-1\end{array}\right]$

$\overset{R_2\leftrightarrow R_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&2\\0&1&0&-1\\0&0&1&2\end{array}\right]$ $\therefore X=\begin{bmatrix}2\\-1\\2\end{bmatrix}$

$(2A+B)X=\begin{bmatrix}3&3&2\\-2&0&1\\1&6&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\-2\\4\end{bmatrix}$

โจทย์เพิ่มเติม

1. ให้ $A=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 3c_1 & 3c_2 & 3c_3 \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3b_1 & 3b_2 & 3b_3 \end{bmatrix}$

พิจารณาข้อความนี้ว่าข้อไหนเป็นจริงบ้าง

- $det(B)=3det(A)$ ✗
- $det(AC)=0$ ✓
- $det(A+C)=det(A)+det(C)$ ✗

$det(B)$ เกิดจากการดำเนินการแถวตามข้อ a : $R_1 \leftrightarrow R_2$, $R_3 \to 3R_3$

$\therefore det(B) = -3det(A)$

และ $det(C)=0$ จาก $\sum_{i=1}^{3} a_{2i}C_{2i}=0$

$\therefore det(AC) = det(A)\,det(C) = 0$

พิจารณา $det(A)+det(C) = det(A)$

$det(A+C)$ เกิดจากการดำเนินการแถวตามข้อ a : $R_3 \to R_3+3R_2$, $R_1 \to 2R_1$

$\therefore det(A+C) = 2\,det(A)$

2. ให้ A เป็นเมทริกซ์ 3 x 3 ซึ่ง det(A) = 10 และ B เป็นเมทริกซ์ที่ได้จากการสลับแถวที่ 1 และ แถวที่ 3 ของ A แล้ว $det(\frac{B}{5})$ มีค่าเท่าใด

$det(B) = -10$ จาก $R_1 \leftrightarrow R_3$ ของ A

$det\left(\frac{B}{5}\right) = \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot det(B)$

$= -\frac{2}{25}$

3. ให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ แล้ว $det(A(B^{-1})^t)$

$\det(A) = 10 - 3 = 7$

$\det(B) = 8 - (-6) = 14$

$\det(A(B^{-1})^t) = \frac{\det(A)}{\det(B)} = \frac{1}{2}$

4. ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ และ C เป็นเมทริก 2×2 ที่สอดคล้องกับ $CA = AB$ ถ้า x เป็นจำนวนจริงบวกที่สอดคล้องกับ $det(C^2 + xB) = -20$ จงหาค่าของ $x^2 + x + 1$

จาก $CA = AB$

$C = ABA^{-1}$

$= -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

$\det(C^2 + xB) = \det\left(\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} -2x & 0 \\ 0 & 2x \end{bmatrix}\right)$

$-20 = \det\left(\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2x & 0 \\ 0 & 2x \end{bmatrix}\right)$

$-20 = (4-2x)(4+2x)$

$x^2 = 9$

$x = \pm 3$

จาก $x \in \mathbb{N}$ $\therefore x = 3$

$x^2 + x + 1 = 13$

5. กำหนดระบบสมการ $AX = B$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} a & 2 & 1 \\ b & 0 & -1 \\ c & 2 & -2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$

ถ้า $\left[\begin{array}{cccc} a & 2 & 1 & 3 \\ b & 0 & -1 & 3 \\ c & 2 & -2 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$ จงหาค่า $det(A)$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$

เห็นได้ชัดว่า $a = 1$

$4b - 5 = 3$

$b = 2$

$4c + 2(-3) + (-2)(5) = -4$

$C = 3$

ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

$\det A = -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$

$= -2(-4+3) - 2(-1-2)$

$= 8$

6. กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์มิติ 3×3 ซึ่ง $[A \mid I] \sim \left[I \left| \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right. \right]$ โดยที่ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ในมิติ 3×3 จงหาค่าของ $A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

ได้ว่า $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}$

$A = (A^{-1})^{-1}$ $\quad adj(A^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

$|A^{-1}| = 1 + 4 = 5$

$A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 17 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix}$

7. ให้ $A = \begin{bmatrix} a & 1-a \\ 1+a & -a \end{bmatrix}$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริง และ $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ แล้วจงหาค่าของ $det((A-\sqrt{2}I)(A-\sqrt{3}I)(A-\sqrt{5}I)(A-\sqrt{7}I))$

$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} a-\lambda & 1-a \\ 1+a & -a-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1$

$\det((A-\sqrt{2}I)(A-\sqrt{3}I)(A-\sqrt{5}I)(A-\sqrt{7}I)) = 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6$

$= 48$

8. ให้ $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง จงหาจำนวนของ A ที่เป็นไปได้เมื่อ $(A^t - I)(A^t - 2I) = 0_{2\times 2}$

$(A^t - I)(A^t - 2I) = \begin{bmatrix} a-1 & 0 \\ 0 & b-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a-2 & 0 \\ 0 & b-2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a-1)(a-2) & 0 \\ 0 & (b-1)(b-2) \end{bmatrix}$

$a = 1$ หรือ 2

$b = 1$ หรือ 2

เป็นไปได้ $= 2 \cdot 2 = 4$ แบบ

9. ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ a & b \end{bmatrix}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง ถ้า $(A - B)B = B(A - B)$ จงหาค่าของ $det(A + B)$

$AB - B^2 = BA - B^2$

$AB = BA$

$AB = \begin{bmatrix} -3+2a & 1+2b \\ 3+3a & -1+3b \end{bmatrix}$

$BA = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ a-b & 2a+3b \end{bmatrix}$

เปรียบเทียบแต่ละตำแหน่ง

$\begin{cases} -3+2a = -4 \longrightarrow a = -0.5 \\ 1+2b = -3 \longrightarrow b = -2 \\ 3+3a = a-b \ : \text{check: } 3+3(-0.5) = -0.5+2 \text{ เป็นจริง} \\ -1+3b = 2a+3b \ : \text{check: } -1+3(-2) = 2(-0.5)+3(-2) \text{ เป็นจริง} \end{cases}$

$\det(A+B) = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{vmatrix}$

$= -2 + \frac{9}{2} = \frac{5}{2}$

10. ให้ A เป็นเมทริกซ์ 3×3 โดยที่ $det(A) = \frac{1}{4}$ และ $B = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ a & 0 & b \end{bmatrix}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง ถ้า $2AB + 3I = A$ เมื่อ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ในมิติ 3×3 จงหาค่าของ a+b

$3I = A - 2AB$

$3I = A(I - 2B)$

$\det(3I) = \det(A(I-2B))$

$27 = \det(A)\det(I-2B)$

$\det(I-2B) = 108$

$\begin{vmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2a & 0 & 1-2b \end{vmatrix} = 108$

$6(1-2(a+b)) = 108$

$a+b = -\frac{17}{2}$

11. ให้ $A = \begin{bmatrix} 2x & 1 \\ x & x \end{bmatrix}$ เมื่อ x และ b เป็นจำนวนจริง และ $2det(A) = 6$ ให้ B เป็นเมทริกซ์ 2×2 โดยที่ $BA^{-1} + BA = 2I$ เมื่อ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ในมิติ 2×2 จงหาค่าของ $det(B)$

$\det(A) = 2x^2 - x$

$3 = 2x^2 - x$

$2x^2 - x - 3 = 0$

$x = \frac{3}{2}$ หรือ -1

$BA^{-1} + BA = 2I$

$B(A^{-1} + A) = 2I$

$\det B \det(A^{-1} + A) = \det(2I)$

$\det B = \frac{4}{\det(A^{-1} + A)}$

$A + A^{-1} = \begin{bmatrix} 2x & 1 \\ x & x \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} x & -1 \\ -x & 2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{3}x & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3}x & \frac{5}{3}x \end{bmatrix}$

$\det(A + A^{-1}) = \frac{35}{9}x^2 - \frac{4}{9}x = \frac{9x^2 + 4}{3}$

$\det B = \frac{12}{9x^2 + 4}$

เมื่อ $x = -1$: $\det B = \frac{12}{13}$

$x = \frac{3}{2}$: $\det B = \frac{48}{97}$

12. ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 4 \end{bmatrix}$ และ $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงที่ $ab \neq 0$ และเมทริกซ์ A สอดคล้องกับ $2(A - I)^{-1} = 4I - A$ จงหาค่าของ $det(adj(A)A^{-1}A^tA^2) + ab$

$2(A - I)^{-1} = 4I - A$

$2(A - I)^{-1}(A - I) = (4I - A)(A - I)$

$2I = 4A - 4I - A^2 + A$

$A^2 - 5A + 6I = 0$

$\begin{bmatrix} 1+ab & 5a \\ 5b & ab+16 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 5a \\ 5b & 20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = 0$

$\begin{bmatrix} ab+2 & 0 \\ 0 & ab+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore ab = -2$

$\det(A) = 4 - ab = 6$

$\det(adj(A)A^{-1}A^tA^2)$

$= (\det(A))^{2-1} \cdot \frac{1}{\det(A)} \cdot \det(A)(\det(A))^2$

$= (\det(A))^3$

$= 216$

$\therefore \det(adj(A)A^{-1}A^tA^2) + (-2) = 214$