

สรุปสูตร

หัวข้อ	สูตร
สมบัติเลขยกกำลัง	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, (a^m)^n = a^{mn}, a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
รากที่ n เมื่อ n เป็นจำนวนคู่	$\sqrt[n]{a^n} = a $
ถอดรากซ้อน ($x \geq y \geq 0$)	$\sqrt{x + y \pm 2\sqrt{xy}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$
เลขชี้กำลังตรรกยะ ($a > 0$)	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$
ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล	$f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1, D_f = \mathbb{R}, R_f = (0, \infty)$
การเลื่อนกราฟ	$y = a^{x-h} + k, R = (k, \infty)$
เปรียบเทียบค่าและอสมการ	$a > 1: a^u < a^v \Leftrightarrow u < v \quad 0 < a < 1: a^u < a^v \Leftrightarrow u > v$
นิยามลอการิทึม	$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$
ผลคูณและเลขชี้กำลัง	$\log_a MN = \log_a M + \log_a N, \log_a M^p = p \log_a M$
การเปลี่ยนฐาน	$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$
แคแรกเทอริสติก	$\log(m \times 10^n) = n + \log m, 1 \leq m < 10$
สมการเอกซ์โพเนนเชียล	$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \quad a^x = b \Leftrightarrow x = \frac{\log b}{\log a}$
สมการลอการิทึม	$\log_a f(x) = c \Leftrightarrow f(x) = a^c, f(x) > 0$
อสมการลอการิทึม ($a > 1$)	$\log_a u < \log_a v \Leftrightarrow 0 < u < v$
อสมการลอการิทึม ($0 < a < 1$)	$\log_a u < \log_a v \Leftrightarrow u > v > 0$
การเติบโตและการสลายตัว	$A(t) = A_0 a^{\frac{t}{T}}$
ดอกเบี้ยทบต้น	$A = P \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$
ความเป็นกรด-เบส	$pH = -\log[H^+]$
ความดังของเสียง	$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0}$

เลขยกกำลังและรากที่ n

เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม

ถ้า a เป็นจำนวนจริงและ n เป็นจำนวนเต็มบวก เลขยกกำลัง a^n คือผลคูณของ a จำนวน n ตัว เรียก a ว่า ฐาน และเรียก n ว่า เลขชี้กำลัง ส่วนเลขชี้กำลังที่เป็นศูนย์หรือจำนวนเต็มลบนิยามดังนี้

$$a^0 = 1 \text{ และ } a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ เมื่อ } a \neq 0 \text{ (ส่วน } 0^0 \text{ ไม่นิยาม)}$$

$$\text{เมื่อ } a, b \neq 0 \text{ และ } m, n \text{ เป็นจำนวนเต็ม: } a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, (a^m)^n = a^{mn}$$

$$(ab)^n = a^n b^n, \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \text{ และ } \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

ข้อควรระวัง $-2^4 = -16$ แต่ $(-2)^4 = 16$ และ $(a+b)^n \neq a^n + b^n$ ถ้าฐานต่างกัน ให้แยกเป็นฐานเฉพาะก่อน เช่น $12^n = 2^{2n} \cdot 3^n$ หรือเปลี่ยน 4, 8, 16 เป็น $2^2, 2^3, 2^4$

ตัวอย่าง

จงทำให้ $\frac{2^{n+3}-2^{n+1}}{4^n \cdot 2^{1-n}}$ อยู่ในรูปอย่างง่าย เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

วิธีทำ ดึงตัวร่วม 2^{n+1} ออกจากตัวเศษ และเปลี่ยน $4^n = 2^{2n}$ ในตัวส่วน

$$\frac{2^{n+1}(2^2 - 1)}{2^{2n} \cdot 2^{1-n}} = \frac{3 \cdot 2^{n+1}}{2^{n+1}}$$

ดังนั้นนิพจน์นี้มีค่าเท่ากับ 3 ไม่ว่า n จะเป็นจำนวนเต็มใด

โจทย์

1. จงหาค่าของ $3^{-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} - (-4)^0$

2. จงเขียน $\frac{(a^2b^{-3})^3}{a^{-1}b^2}$ ให้อยู่ในรูปที่เลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวก เมื่อ $a, b \neq 0$

3. จงหาค่าของ $\frac{8^3 \cdot 4^{-2}}{16^{-1} \cdot 32}$

4. จงหาค่าของ $\frac{12^3 \cdot 18^{-2}}{6^{-1}}$

5. ให้ n เป็นจำนวนเต็ม จงทำให้ $\frac{2^{n+2} \cdot 3^n - 6^n}{6^{n-1}}$ อยู่ในรูปอย่างง่าย

7. จำนวน $8^5 \cdot 25^6 \cdot 3$ เมื่อเขียนในระบบฐานสิบมีกี่หลัก และผลบวกของเลขโดดทุกหลักเท่ากับเท่าใด

9. จงหาจำนวนเต็ม n ที่ทำให้ $\frac{(-2)^n \cdot 4^3}{8^{n-1}} = -\frac{1}{2}$

6. จงเรียงจำนวน $A = 2^{-100}$, $B = 3^{-60}$ และ $C = 10^{-30}$ จากน้อยไปมาก

8. ให้ $a_k = 2^k + 3^k$ สำหรับจำนวนเต็ม k จงหาค่าของ $\frac{a_{11}a_9 - (a_{10})^2}{a_6a_4 - (a_5)^2}$

10. จงหาผลบวกของจำนวนเต็ม n ทั้งหมดที่ทำให้ $(n^2 - 3n + 1)^{n^2-4} = 1$

รากที่ n และจำนวนในรูปกรณฑ์

ให้ n เป็นจำนวนเต็มที่มีมากกว่า 1 จำนวนจริง b เป็นรากที่ n ของ a เมื่อ $b^n = a$ เช่น รากที่สี่ของ 16 คือ 2 และ -2 ส่วนรากที่สามของ -8 มีตัวเดียวคือ -2

ค่าหลักของรากที่ n ของ a เขียนแทนด้วย $\sqrt[n]{a}$ โดยเมื่อ $a \geq 0$ คือรากที่ไม่เป็นลบ เมื่อ $a < 0$ และ n เป็นจำนวนคี่ คือรากที่เป็นลบ ส่วนเมื่อ $a < 0$ และ n เป็นจำนวนคู่ จะไม่มีรากที่เป็นจำนวนจริง

$\sqrt[n]{a^n} = |a|$ เมื่อ n เป็นจำนวนคู่ และ $\sqrt[n]{a^n} = a$ เมื่อ n เป็นจำนวนคี่

$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ และ $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ เมื่อรากทุกตัวหาค่าได้และ $b \neq 0$

ถอดรากซ้อน $\sqrt{(x+y) \pm 2\sqrt{xy}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$ เมื่อ $x \geq y \geq 0$ และทำตัวส่วนด้วยคอนจูเกต

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$$

ข้อควรระวัง $\sqrt{(-3)^2} = 3$ ไม่ใช่ -3 และ $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ ถ้าจะเปรียบเทียบกรณฑ์ต่างอันดับ ต้องทำอันดับให้เท่ากันก่อน เช่น $\sqrt{2} = \sqrt[4]{8}$ และ $\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{9}$ จึงได้ $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$

ตัวอย่าง

จงหาค่าของ $\sqrt{7-4\sqrt{3}} + \frac{1}{2-\sqrt{3}}$

วิธีทำ เขียน $7-4\sqrt{3} = 7-2\sqrt{12}$ แล้วหาสองจำนวนที่บวกกันได้ 7 และคูณกันได้ 12 คือ 4 กับ 3 จึงได้

$$\sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{4-\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$$

พจน์หลังคูณทั้งเศษและส่วนด้วยคอนจูเกต $2+\sqrt{3}$

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} = 2+\sqrt{3}$$

ดังนั้นผลรวมเท่ากับ $(2-\sqrt{3}) + (2+\sqrt{3}) = 4$

โจทย์

1. จงหาค่าของ $\sqrt[3]{-27} + \sqrt[4]{81} - \sqrt{(-5)^2}$

2. จงทำให้ $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{16} + \sqrt{32} - \sqrt{18}$ อยู่ในรูปอย่างง่าย

3. ถ้า $-2 < x < 3$ จงทำให้ $\sqrt{x^2 + 4x + 4} + \sqrt[4]{(x-3)^4} + \sqrt[3]{(x-3)^3}$ อยู่ในรูปอย่างง่าย

4. จงทำตัวส่วนให้ไม่ติดกรณฑ์ แล้วหาค่าของ $\frac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}}$

5. จงหาค่าของ $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} - \sqrt{9 - 4\sqrt{2}}$

6. จงเรียง $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$ และ $\sqrt[5]{26}$ จากน้อยไปมาก

7. จงทำตัวส่วนของ $\frac{1}{\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{3}+1}$ ให้ไม่ติดกรณฑ์

8. จงหาค่าของ $\frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} + \frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}} + \frac{1}{\sqrt{7+2\sqrt{12}}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{49+2\sqrt{600}}}$

9. ถ้า $\sqrt{11} = a + b$ โดย a เป็นจำนวนเต็ม และ $0 < b < 1$ จงหาค่าของ $b^2 + 6b$

10. จงหาจำนวนเต็มบวก n ที่น้อยที่สุด ซึ่งทำให้ $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < 0.05$

เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ

เมื่อฐาน $a > 0$ เราขยายเลขชี้กำลังให้เป็นจำนวนตรรกยะได้ โดยใช้รากที่ n เป็นตัวเชื่อม

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ และ $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$ เมื่อ $a > 0$, m เป็นจำนวนเต็ม และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

สมบัติ $a^r a^s = a^{r+s}$, $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$, $(a^r)^s = a^{rs}$, $(ab)^r = a^r b^r$ ใช้ได้เมื่อ r, s เป็นจำนวนตรรกยะหรือจำนวนจริง และ $a, b > 0$ เช่น $2^{\sqrt{2}} \cdot 2^{-\sqrt{2}} = 2^0 = 1$

ข้อควรระวังเรื่องฐานลบ $(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2$ แต่ถ้าเปลี่ยน $\frac{1}{3}$ เป็น $\frac{2}{6}$ แล้วคิด $\sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$ จะได้ค่าขัดกัน สมบัติข้างบนจึงใช้กับฐานบวกเท่านั้น ถ้าฐานเป็นลบให้คิดจากรากที่ n โดยตรง

ตัวอย่าง

จงหาค่าของ $\left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} + (0.25)^{-1.5}$

วิธีทำ พจน์แรกกลับเศษเป็นส่วนเพื่อทำเลขชี้กำลังให้เป็นบวก แล้วถอดรากที่สามก่อนยกกำลังสอง

$$\left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

พจน์หลัง $0.25 = \frac{1}{4}$ และ $-1.5 = -\frac{3}{2}$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} = 4^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{4})^3 = 8$$

ดังนั้นได้ $\frac{4}{9} + 8 = \frac{76}{9}$

โจทย์

1. จงหาค่าของ $16^{\frac{3}{4}} + 27^{-\frac{2}{3}} \cdot 81^{\frac{1}{2}}$

2. เมื่อ $x > 0$ จงเขียน $\frac{\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x^3}}$ ในรูป x^r

3. จงหาค่าของ $\frac{(0.008)^{-\frac{1}{3}} \cdot (0.25)^{0.5}}{(0.0016)^{0.25}}$

4. จงหาค่าของ $\frac{3^{\sqrt{2}+1} \cdot 9^{1-\sqrt{2}}}{27^{-\frac{\sqrt{2}}{3}}}$

5. จงเขียน $\sqrt{3^3 \sqrt{9\sqrt{3}}}$ ในรูป 3^r

6. เมื่อ $a, b > 0$ และ $a \neq b$ จงทำให้ $\frac{a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} - (ab)^{\frac{1}{2}}$ อยู่ในรูปอย่างง่าย

7. ถ้า $x > 0$ และ $x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}} = 3$ จงหาค่าของ
 ก. $x^{\frac{2}{3}} + x^{-\frac{2}{3}}$
 ข. $x + x^{-1}$

8. จงหาค่าของ $\frac{1}{\frac{1}{2^8}-1} - \frac{1}{\frac{1}{2^8}+1} - \frac{2}{\frac{1}{2^4}+1} - \frac{4}{\frac{1}{2^2}+1}$

โจทย์ผสม

1. จงหาค่าของ $\frac{2^{-1}+3^{-1}}{2^{-1}-3^{-1}} + \sqrt[3]{-64} \cdot 4^{-\frac{1}{2}}$

2. ถ้า $x = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$ จงหาค่าของ $x^3 - x^{-3}$

3. ถ้า $4^a = \sqrt{27}$ และ $3^b = \sqrt[3]{4}$ จงหาค่าของ 16^{ab}

4. จงหาค่าของ $(2 + \sqrt{5})^{\frac{1}{3}} \cdot (9 - 4\sqrt{5})^{\frac{1}{6}}$

5. จงหาจำนวนเต็มบวก n ที่น้อยที่สุด ซึ่งทำให้ทั้ง $\sqrt[3]{\frac{n}{2}}$ และ $\sqrt{\frac{n}{3}}$ เป็นจำนวนเต็ม

6. จงหาค่าของ $\sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}}$

7. จงหาจำนวนเต็มที่มากที่สุดที่น้อยกว่า $(\sqrt{5} + \sqrt{3})^6$

8. จงหาจำนวนเต็ม $n \geq 2$ ทั้งหมดที่ทำให้ $\sqrt[n]{2^{12}} \cdot \sqrt[3]{4^n} = 64$

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

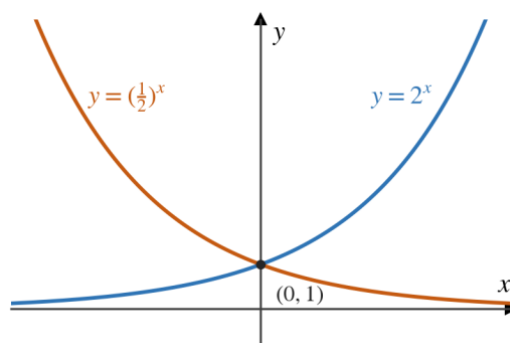
ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและกราฟ

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล คือฟังก์ชันในรูป $f(x) = a^x$ เมื่อ $a > 0$ และ $a \neq 1$ (ถ้า $a = 1$ จะได้ $y = 1$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันคงตัว) ฐานที่พบบ่อยคือ จำนวน $e \approx 2.718$ ซึ่งให้ฟังก์ชัน $y = e^x$

โดเมนคือ $\mathbb{R}$ เรนจ์คือ $(0, \infty)$ กราฟผ่านจุด $(0,1)$ เสมอ และมีเส้นกำกับ $y = 0$ (แกน x)

ถ้า $a > 1$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ถ้า $0 < a < 1$ เป็นฟังก์ชันลด และทั้งสองกรณีเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

กราฟของ $y = a^x$ กับ $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$ สมมาตรกันเทียบกับแกน y



การเลื่อนกราฟ $y = a^{x-h} + k$ คือเลื่อนกราฟ $y = a^x$ ไปทางขวา h หน่วยและขึ้น k หน่วย ได้เส้นกำกับ $y = k$ และเรนจ์ (k, ∞) ส่วน $y = -a^x$ คือการสะท้อนเทียบกับแกน x มีเรนจ์ $(-\infty, 0)$

ตัวอย่าง

จงหาเส้นกำกับ เรนจ์ และจุดตัดแกนทั้งสองของกราฟ $y = 2^{x+1} - 4$

วิธีทำ กราฟนี้คือ $y = 2^x$ ที่เลื่อนไปทางซ้าย 1 หน่วยและลง 4 หน่วย จึงมีเส้นกำกับ $y = -4$ และเรนจ์ $(-4, \infty)$

จุดตัดแกน y แทน $x = 0$ ได้ $y = 2 - 4 = -2$ ส่วนจุดตัดแกน x แทน $y = 0$ ได้

$$2^{x+1} = 4 = 2^2 \Rightarrow x + 1 = 2$$

ดังนั้นกราฟตัดแกนที่ $(0, -2)$ และ $(1, 0)$

ตัวอย่าง

จงหาสมการของกราฟที่ได้จากการเลื่อนกราฟ $y = 2^x$ ไปทางขวา 3 หน่วย แล้วสะท้อนเทียบกับแกน y

วิธีทำ เลื่อนได้ $y = 2^{x-3}$ แล้วแทน x ด้วย $-x$ ได้ $y = 2^{-x-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3}$ (ลำดับการแปลงสำคัญ)

ข้อสังเกต เมื่อ $a > b > 1$ กราฟ $y = a^x$ กับ $y = b^x$ ตัดกันที่ $(0,1)$ จุดเดียว และในช่วง $x > 0$ กราฟ $y = a^x$ อยู่เหนือและชันกว่า ฐานยิ่งมาก กราฟจึงยิ่งพุ่งขึ้นเร็วทางขวาของแกน y

โจทย์

- จากฟังก์ชัน $y = \left(\frac{e}{3}\right)^x$, $y = x^e$, $y = (1 - \sqrt{2})^x$, $y = \left(\frac{\pi}{e}\right)^x$, $y = 1^x$ และ $y = 4^{-x}$ ฟังก์ชันใดเป็นฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล และเป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือลด
- กราฟของ $f(x) = a^x$ ผ่านจุด $(-2, 9)$ จงหาค่า a และ $f(-1)$ พร้อมบอกว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือลด
- จงหาเรนจ์และสมการเส้นกำกับของกราฟต่อไปนี้
 - $y = 3^x + 2$
 - $y = -e^x$
 - $y = 2^{x+1} + 2^x - 3$
- พิกัดวาดกราฟ $y = 4^x$ ด้วยหมึกที่ยังไม่แห้ง แล้วพับกระดาษตามแนวแกน y รอยหมึกที่ติดอีกฝั่งเป็นกราฟ $y = g(x)$ จงหา $g(x)$ และค่าของ $g\left(\frac{3}{2}\right) + g\left(-\frac{1}{2}\right)$

5. จงร่างกราฟของ $y = 8 - 2^x$ พร้อมบอกเส้นกำกับ เรนจ์ และจุดตัดแกนทั้งสอง

6. กราฟของ $y = a^x + b$ เมื่อ $a > 0$ และ $a \neq 1$ ผ่านจุด $(1,1)$ และ $(2,7)$ จงหาค่า a, b และเรนจ์ของฟังก์ชันนี้

7. กราฟของ $y = 2^{|x|}$ กับกราฟของ $y = 3 - x^2$ ตัดกันกี่จุด จงหาพิกัดของจุดตัดทั้งหมด

8. กราฟของ $y = (\sqrt{2})^x$ กับกราฟของ $y = |x|$ ตัดกันกี่จุด จงแสดงเหตุผล

สมบัติและการเปรียบเทียบค่าเลขยกกำลัง

เพราะ $y = a^x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลดเสมอ เราจึงเปรียบเทียบเลขยกกำลังที่มีฐานเดียวกันได้จากเลขชี้กำลัง

ถ้า $a > 1$ แล้ว $a^u < a^v \Leftrightarrow u < v$ (ทิศเดิม)

ถ้า $0 < a < 1$ แล้ว $a^u < a^v \Leftrightarrow u > v$ (กลับทิศ)

$a^u = a^v \Leftrightarrow u = v$ (หนึ่งต่อหนึ่ง) และถ้า $0 < a < b$ กับ $n > 0$ แล้ว $a^n < b^n$

ตัวอย่าง

จงเรียงจำนวน 2^{45} , 3^{30} และ 5^{15} จากน้อยไปมาก

วิธีทำ ฐานต่างกัน จึงทำเลขชี้กำลังให้เท่ากัน โดย ห.ร.ม. ของ 45, 30 และ 15 คือ 15

$$2^{45} = (2^3)^{15} = 8^{15}, 3^{30} = (3^2)^{15} = 9^{15}$$

เลขชี้กำลังเท่ากันและเป็นบวก ฐานมากกว่าจึงได้ค่ามากกว่า และ $5 < 8 < 9$

ดังนั้น $5^{15} < 2^{45} < 3^{30}$

ค่าต่ำสุดและค่าสูงสุด แทน $u = a^x$ แล้วจัดกำลังสองสมบูรณ์ แต่ต้องจำว่า $u > 0$ เสมอ อีกเครื่องมือหนึ่งคือ $a^x + a^{-x} \geq 2$ ซึ่งเท่ากับ 2 เมื่อ $x = 0$ เท่านั้น (เพราะ $u + \frac{1}{u} - 2 = \frac{(u-1)^2}{u} \geq 0$)

โจทย์

1. จงเปรียบเทียบว่าจำนวนใดในแต่ละคู่มากกว่า

ก. $3^{\sqrt{2}}$ กับ $3^{1.5}$

ข. $(0.7)^{-2}$ กับ $(0.7)^{-3}$

ค. $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{0.2}$ กับ 1

2. กำหนด $f(x) = 2^x$ ถ้า $f(a) \cdot f(3) =$

$f(2a - 1)$ จงหาค่า a

3. จงเปรียบเทียบว่าจำนวนใดในแต่ละคู่มากกว่า

ก. $8^{\frac{1}{4}}$ กับ $4^{\frac{1}{3}}$

ข. $\left(\frac{1}{9}\right)^{-0.4}$ กับ $27^{0.3}$

4. จงหาค่า a ทั้งหมดที่ทำให้ $y = (a^2 - 3)^x$ เป็นฟังก์ชันลด

5. จงหาจำนวนเต็มบวก n ที่มากที่สุดที่ทำให้ $n^{200} < 5^{300}$

6. จงหาค่าต่ำสุดของ $f(x) = 9^x - 2 \cdot 3^{x+1} + 11$ และค่า x ที่ทำให้ f มีค่าต่ำสุด

7. นักเรียนคนหนึ่งตอบว่าค่าต่ำสุดของ $f(x) = 4^x + 2^{x+1} - 3$ คือ -4 จงอธิบายว่าผิดอย่างไร และหาเรนจ์ของ f

8. จงหาค่าต่ำสุดของ $f(x) = 4^x + 4^{-x} - 2^{x+1} - 2^{1-x} + 5$ และค่า x ที่ทำให้ f มีค่าต่ำสุด

โจทย์ผสม

- กำหนด $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 3$ จงหาเรนจ์และ
เส้นกำกับของกราฟ f แล้วเปรียบเทียบ $f(\sqrt{5})$
กับ $f(2.2)$
- ฟังก์ชัน f มี $f(x) > 0$ และ $f(x+y) =$
 $f(x) \cdot f(y)$ สำหรับทุกจำนวนจริง x, y ถ้า
 $f(2) = \frac{1}{4}$ จงหา $f(0)$, $f(1)$ และ $f(-3)$ แล้ว
บอกว่าถ้า f เป็นฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล จะเป็น
ฟังก์ชันเพิ่มหรือลด
- เส้นตรง $y = k$ เมื่อ $k > 1$ ตัดกราฟ $y = 4^x$,
 $y = 2^x$ และ $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ที่จุด A, B และ C
ตามลำดับ ถ้า $AB = 1$ จงหาค่า k และความยาว
 BC
- โดยไม่ใช้เครื่องคิดเลข จงเปรียบเทียบว่า $2^{\sqrt{3}}$ กับ
 $3^{\sqrt{2}}$ จำนวนใดมากกว่า (แนะ: เทียบทั้งสองจำนวน
กับ 4)

5. จงหาค่า m ทั้งหมดที่ทำให้เส้นตรง $y = m$ ตัดกราฟของ $y = 4^x - 2^{x+1}$ สองจุด

6. กำหนด $0 < a < 1$ จงเรียงจำนวน a^a , a^{a^a} และ $(a^a)^a$ จากน้อยไปมาก

7. จุด $(p, 3)$ และ $(q, 12)$ อยู่บนกราฟ $y = 2^x$ จงหาค่าของ $q - p$ และ 2^{p+q}

8. กำหนด $f(x) = 3^{-|x-2|}$ จงหาเรนจ์ของ f และเรียง $f(0)$, $f(\sqrt{10})$, $f\left(\frac{7}{2}\right)$ จากน้อยไปมาก

9. จงหาค่า k ทั้งหมดที่ทำให้กราฟของ $y = 2^x + k$ ผ่านจุดภาคที่ 3 แต่ไม่ผ่านจุดภาคที่ 4

10. จงเปรียบเทียบ $A = 2^x + 2^{-x}$ กับ $B = 3^x + 3^{-x}$ สำหรับทุกจำนวนจริง x

ฟังก์ชันลอการิทึม

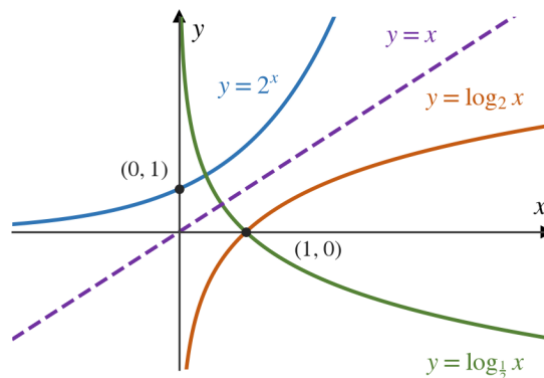
ฟังก์ชันลอการิทึมและกราฟ

ฟังก์ชันลอการิทึม คือฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล $y = a^x$ เขียนแทนด้วย $y = \log_a x$ อ่านว่า ล็อก x ฐาน a ค่าของ $\log_a x$ คือเลขชี้กำลังที่ต้องยก a ขึ้นไปแล้วได้ x

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y \text{ เมื่อ } a > 0, a \neq 1 \text{ และ } x > 0$$

โดเมน $(0, \infty)$ เรนจ์ $\mathbb{R}$ กราฟผ่านจุด $(1, 0)$ มีแกน y (เส้น $x = 0$) เป็นเส้นกำกับ และเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

$a > 1$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม และ $0 < a < 1$ เป็นฟังก์ชันลด กราฟของ $y = \log_a x$ กับ $y = a^x$ สมมาตรกันเทียบกับเส้น $y = x$



ตัวอย่าง

จงหาค่าของ $\log_{\frac{1}{4}} 32$

วิธีทำ ให้ $\log_{\frac{1}{4}} 32 = y$ จากนิยามจะได้ $\left(\frac{1}{4}\right)^y = 32$ เขียนทั้งสองข้างเป็นฐาน 2

$$2^{-2y} = 2^5$$

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง จึงได้ $-2y = 5$ ดังนั้น $\log_{\frac{1}{4}} 32 = -\frac{5}{2}$

ข้อควรระวัง โดเมนของ $y = \log_{g(x)} f(x)$ ต้องสอดคล้องครบทั้งสามเงื่อนไข คือ $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ และ $g(x) \neq 1$ อย่าลืมหาค่าที่ทำให้ฐานเท่ากับ 1

ตัวอย่าง

จงเรียง $p = \log_3 10$, $q = \log_{\frac{1}{2}} 0.3$ และ $r = \log_5 \frac{1}{2}$ จากน้อยไปมาก

วิธีทำ $2 < p < 3$ เพราะ $9 < 10 < 27$ ฐาน $\frac{1}{2}$ ทำให้ $1 < q < 2$ และ $r < 0$ ดังนั้น $r < q < p$

เทคนิค นอกจากจุด $(1, 0)$ แล้ว กราฟของ $y = \log_a x$ ทุกฐานยังผ่านจุด $(a, 1)$ และ $\left(\frac{1}{a}, -1\right)$ เสมอ ใช้สามจุดนี้กับเส้นกำกับ $x = 0$ ช่วยร่างกราฟได้อย่างรวดเร็ว

โจทย์

1. ก. จงเขียน $3^4 = 81$ ในรูปลอการิทึม
ข. จงเขียน $\log_5 \frac{1}{25} = -2$ ในรูปเลขยกกำลัง

3. จงหาค่าของ $\log_{2\sqrt{2}} 16$ และ $\log_{\sqrt{5}} \sqrt[3]{\frac{1}{25}}$

5. จงร่างกราฟของ $y = \log_2(x + 4) - 1$ พร้อมบอกโดเมน เรนจ์ เส้นกำกับ และจุดตัดแกนทั้งสอง

2. จงหาค่าของ $\log_2 64 - \log_{\frac{1}{3}} 27$

4. กำหนด $f(x) = 3^{x+2} - 1$ จงหา $f^{-1}(x)$ และโดเมนของ f^{-1}

6. จงหาโดเมนของ $f(x) = \log_{2x-3}(12 - x - x^2)$

7. กราฟของ $y = \log_a(x - h) + k$ มีเส้นกำกับคือเส้น $x = 2$ และผ่านจุด $(3, 1)$ กับ $(11, -1)$ จงหาค่า a, h, k และบอกว่าเป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลด

9. จงหาค่าของ $\log_{\sqrt{3}}(\log_2(\log_3 6561))$

11. จงหาค่า a ทั้งหมดที่ทำให้ $f(x) = \log_{a^2-3} x$ เป็นฟังก์ชันลด

8. กำหนด $f(x) = \log_2(x + \sqrt{x^2 + 1})$ ซึ่งมีโดเมนเป็น $\mathbb{R}$ จงแสดงว่า $f(-x) = -f(x)$ ทุก x แล้วหา $f^{-1}(x)$

10. กราฟของ $y = \log_2(x + 1)$ ผ่านจุดที่มีพิกัด x และ y เป็นจำนวนเต็มทั้งคู่ และ $x \leq 1000$ ทั้งหมดกี่จุด

12. กำหนด $f(x) = 2^x$ และ $g(x) = \log_4 x$ จงเขียน $g(f(x))$ และ $f(g(x))$ ในรูปอย่างง่าย พร้อมบอกโดเมนของแต่ละฟังก์ชัน

สมบัติของลอการิทึม

เมื่อ $a > 0, a \neq 1$ และ $M, N > 0$ ลอการิทึมมีสมบัติที่ใช้อย่างนี้ ทุกข้อได้มาจากสมบัติของเลขยกกำลัง (เมื่อไม่เขียนฐาน $\log x$ หมายถึง $\log_{10} x$)

$$\log_a MN = \log_a M + \log_a N \text{ และ } \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

$$\log_a M^p = p \log_a M, \log_a a = 1, \log_a 1 = 0 \text{ และ } a^{\log_a M} = M$$

$$\text{เปลี่ยนฐาน } \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \text{ จึงได้ } \log_a b = \frac{1}{\log_b a} \text{ และ } \log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$$

$$\log_{a^q} M^p = \frac{p}{q} \log_a M \text{ และ } a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$$

ตัวอย่าง

กำหนด $\log 2 = a$ และ $\log 3 = b$ จงเขียน $\log_6 15$ ในรูปของ a และ b

วิธีทำ เปลี่ยนเป็นฐาน 10 และใช้ $\log 5 = \log \frac{10}{2} = 1 - a$

$$\log_6 15 = \frac{\log 3 + \log 5}{\log 2 + \log 3} = \frac{b + 1 - a}{a + b}$$

$$\text{ดังนั้น } \log_6 15 = \frac{1-a+b}{a+b}$$

ข้อควรระวัง $\log_a (M + N) \neq \log_a M + \log_a N$ และ $(\log_a M)^2 \neq 2 \log_a M$ สมบัติผลคูณใช้ได้กับผลคูณที่อยู่ภายใน $\log$ เท่านั้น

โจทย์

1. จงหาค่าของ

ก. $\log_6 4 + \log_6 9$

ข. $\log_2 40 - \log_2 5$

2. จงหาค่าของ $2 \log_3 6 - \log_3 4 + 7^{\log_7 5}$

3. จงหาค่าของ $\log_4 27 \cdot \log_9 32$

4. จงหาค่าของ $\frac{1}{\log_2 30} + \frac{1}{\log_3 30} + \frac{1}{\log_5 30}$

5. จงหาค่าของ $3^{\log_2 7} - 7^{\log_2 3} + 4^{\log_8 27}$

6. จงหาค่าของ $\log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \dots \cdot \log_{242} 243$

7. กำหนด $\log_2 3 = a$ และ $\log_3 5 = b$ จงเขียน $\log_{15} 20$ ในรูปของ a และ b

8. ถ้า $a > 1$ และ $\log_a b = 3$ จงหาค่าของ $\log_{ab} \frac{b^2}{\sqrt{a}}$

9. กำหนด $\log_{18} 24 = a$ จงเขียน $\log_{12} 54$ ในรูปของ a

10. ถ้า $\log_a b - \log_b a = 2$ เมื่อ $a, b > 0$ และ $a, b \neq 1$ จงหาค่าของ $(\log_a b)^2 + (\log_b a)^2$

ลอการิทึมสามัญและลอการิทึมธรรมชาติ

ลอการิทึมสามัญ คือลอการิทึมฐาน 10 เขียน $\log x$ แทน $\log_{10} x$ ส่วนลอการิทึมธรรมชาติ คือลอการิทึมฐาน e เขียน $\ln x$ แทน $\log_e x$ เมื่อ $e \approx 2.718$

$\log 10^n = n$, $\ln e = 1$, $\ln e^k = k$ และ $e^{\ln x} = x$ เมื่อ $x > 0$ ถ้า $\log N = c$ เรียก N ว่าแอนติลอการิทึมของ c

ถ้า $N = m \times 10^n$ เมื่อ $1 \leq m < 10$ และ n เป็นจำนวนเต็ม จะได้ $\log N = n + \log m$ เรียก n ว่าแคแรกเทอริสติก และเรียก $\log m$ ซึ่ง $0 \leq \log m < 1$ ว่าแมนทิสซา

ถ้าแคแรกเทอริสติกเป็น $n \geq 0$ แล้ว N มีส่วนที่เป็นจำนวนเต็ม $n + 1$ หลัก ถ้าเป็น $-n$ ($n > 0$) ตัวเลขตัวแรกที่ไม่ใช่ศูนย์ของ N อยู่ที่ตำแหน่งทศนิยมที่ n

ตัวอย่าง

กำหนด $\log 2 \approx 0.3010$ และ $\log 3 \approx 0.4771$ จงหาค่าของ $\log 6000$ และ $\log 0.0006$

วิธีทำ $\log 6 = \log 2 + \log 3 \approx 0.7781$ และเขียน $6000 = 6 \times 10^3$, $0.0006 = 6 \times 10^{-4}$

$$\log 6000 \approx 3 + 0.7781 = 3.7781$$

$$\log 0.0006 \approx -4 + 0.7781 = -3.2219$$

แคแรกเทอริสติกคือ 3 และ -4 ตามลำดับ ส่วนแมนทิสซาเท่ากันคือ 0.7781

ข้อควรระวัง แมนทิสซาต้องอยู่ในช่วง $[0,1)$ เสมอ เช่น $\log 0.05 = \log 5 - 2 \approx -1.3010 = -2 + 0.6990$

จึงมีแคแรกเทอริสติกเป็น -2 ไม่ใช่ -1

โจทย์

1. จงหาค่าของ $\log 0.001 + \ln e^4 + e^{\ln 5}$

2. จงหาแคแรกเทอริสติกของ $\log 523.4$ และของ $\log 0.00718$

3. กำหนด $\log 3 \approx 0.4771$ จงหาจำนวน N และ M ที่ทำให้ $\log N = 2.4771$ และ $\log M = -1.5229$

5. กำหนด $\log 2 \approx 0.3010$ และ $\log 3 \approx 0.4771$ จงหาว่า 12^{30} มีกี่หลัก

7. กำหนด $\ln 2 \approx 0.6931$, $\ln 5 \approx 1.6094$ และ $\log 3 \approx 0.4771$ จงหาค่าประมาณของ $\log e$ (ทศนิยม 4 ตำแหน่ง) แล้วเปรียบเทียบกับ e^{30} กับ 3^{27} ว่าจำนวนใดมากกว่า

4. กำหนด $\ln 2 \approx 0.6931$ และ $\ln 3 \approx 1.0986$ จงหาค่าประมาณของ $\ln 24$ และ $\ln \frac{e^2}{9}$

6. กำหนด $\log 2 \approx 0.3010$ และ $\log 3 \approx 0.4771$ เมื่อเขียน $(0.6)^{25}$ เป็นทศนิยม ตัวเลขตัวแรกที่ไม่ใช่ศูนย์อยู่ที่ตำแหน่งทศนิยมที่เท่าใด

8. กำหนด $\log 2 \approx 0.3010$, $\log 3 \approx 0.4771$ และ $\log 7 \approx 0.8451$ จงหาว่า 7^{40} มีกี่หลัก เลขโดดหลักซ้ายสุดคือเลขใด และเลขโดดหลักหน่วยคือเลขใด

โจทย์ผสม

- กำหนด $f(x) = \log_2 x$ จงหาค่าของ $f(24) - f(3) + f(\sqrt{2}) + 2^{f(5)}$
- กำหนด $f(x) = \log(x - 1) + \log(x + 2)$ และ $g(x) = \log(x^2 + x - 2)$ จงหาโดเมนของ f และของ g แล้วบอกว่า f กับ g เป็นฟังก์ชันเดียวกันหรือไม่
- กำหนด $f(x) = \ln(2x - 1) + 3$ จงหาโดเมนของ f หา $f^{-1}(x)$ และหาค่าของ $f^{-1}(3)$
- โดยไม่ใช้ค่าประมาณของลอการิทึม จงเปรียบเทียบว่า $\log_2 3$ กับ $\log_3 5$ จำนวนใดมากกว่า
- จงหาค่า k ทั้งหมดที่ทำให้ $f(x) = \log_2(x^2 - 2kx + k + 6)$ มีโดเมนเป็น $\mathbb{R}$ และเมื่อ $k = 2$ จงหาเรนจ์ของ f
- จงหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของ $f(x) = \log_2(4x) \cdot \log_2 \frac{x}{2}$ เมื่อ $\frac{1}{4} \leq x \leq 8$ พร้อมทั้งค่า x ที่ให้ค่าเหล่านั้น

7. ถ้า 2^{2026} มี a หลัก และ 5^{2026} มี b หลัก จงหาค่าของ $a + b$ โดยไม่ใช้ค่าประมาณของลอการิทึม

9. จงหาโดเมนของ $f(x) = \ln(\log x) + \log(2 - \ln x)$

11. ค่าสูงสุดลบด้วยค่าต่ำสุดของ $f(x) = \log_a x$ บนช่วง $[2, 8]$ เท่ากับ 2 จงหาค่า a ทั้งหมด

8. ถ้า $\ln a = 2$ และ $\ln b = 3$ จงหาค่าของ $\log_a b^4 + \ln \frac{a^3}{eb}$

10. ฟังก์ชัน f มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนจริงบวก และ $f(xy) = f(x) + f(y)$ ทุก $x, y > 0$ ถ้า $f(8) = 3$ จงหาค่าของ $f(\sqrt{2}) + f\left(\frac{1}{4}\right)$

12. มีจำนวนเต็ม n ตั้งแต่ 1 ถึง 100 ที่จำนวนที่ทำให้ $\log_8 n$ เป็นจำนวนตรรกยะ

สมการเอกซ์โพเนนเชียลและสมการลอการิทึม

สมการเอกซ์โพเนนเชียล

สมการเอกซ์โพเนนเชียล คือสมการที่มีตัวแปรอยู่ในเลขชี้กำลัง เช่น $3^{x+1} = 81$ หรือ $4^x - 2^x = 12$ หลักที่ใช้แก้คือ $y = a^x$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง จึงเทียบเลขชี้กำลังได้เมื่อฐานเท่ากัน

เมื่อ $a > 0$ และ $a \neq 1$ จะได้ $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

ถ้าทำฐานให้เท่ากันไม่ได้ ให้ใส่ $\log$ ทั้งสองข้าง $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b = \frac{\log b}{\log a}$ (เมื่อ $b > 0$)

ลักษณะของสมการ	วิธีแก้
มี a^{x+k} หลายพจน์บวกกัน	ดึงกำลังที่ต่ำที่สุดเป็นตัวร่วม
มี a^{2x} และ a^x	ให้ $u = a^x$ โดย $u > 0$ แล้วแก้สมการกำลังสอง
$p \cdot a^{2x} + q \cdot (ab)^x + r \cdot b^{2x} = 0$	หารด้วย b^{2x} แล้วให้ $t = \left(\frac{a}{b}\right)^x$
$h^{f(x)} = h^{g(x)}$ เมื่อฐาน $h > 0$ มีตัวแปร	แยกกรณี $h = 1$ กับกรณี $f(x) = g(x)$

ข้อควรระวัง $u = a^x$ เป็นบวกเสมอ ค่า u ที่เป็นศูนย์หรือลบต้องตัดทิ้ง และถ้าฐานเป็นนิพจน์ของ x ต้องตรวจกรณีฐานเท่ากับ 1 แยกต่างหาก เพราะ 1 ยกกำลังอะไรก็ได้ 1

ตัวอย่าง

จงแก้สมการ $4^x - 2^{x+1} - 8 = 0$

วิธีทำ เขียน $4^x = (2^x)^2$ และ $2^{x+1} = 2 \cdot 2^x$ แล้วให้ $u = 2^x$ โดย $u > 0$ จะได้

$$u^2 - 2u - 8 = 0$$

แยกตัวประกอบได้ $(u - 4)(u + 2) = 0$ จึงได้ $u = 4$ หรือ $u = -2$ แต่ $u > 0$ จึงตัด $u = -2$ ทิ้ง

ดังนั้น $2^x = 4 = 2^2$ นั่นคือ $x = 2$

โจทย์

1. จงแก้สมการ $9^{x+1} = 27^{x-1}$

2. จงแก้สมการ $\left(\frac{1}{8}\right)^x = 16\sqrt{2}$

3. จงแก้สมการ $2^{x+2} + 2^{x-1} = 72$

4. จงแก้สมการ $3^{2x+1} - 26 \cdot 3^x - 9 = 0$

5. กำหนด $\log 2 \approx 0.3010$ และ $\log 3 \approx 0.4771$ จงแก้สมการ $2^{x+1} = 3^{x-1}$ (ตอบเป็นทศนิยม 2 ตำแหน่ง)

6. จงแก้ระบบสมการ $2^x + 3^y = 17$ และ $2^{x+2} - 3^{y+1} = 5$

7. จงหาเซตคำตอบของสมการ $2 \cdot 4^x - 5 \cdot 6^x + 3 \cdot 9^x = 0$

8. จงหาเซตคำตอบของสมการ $(x^2 - 4x + 5)^{x^2} = (x^2 - 4x + 5)^{3x+4}$

9. จงหาเซตคำตอบของสมการ $(\sqrt{5+2\sqrt{6}})^x + (\sqrt{5-2\sqrt{6}})^x = 10$

10. จงแก้สมการ $2^{x+3} \cdot 3^x = 12^x$

11. จงหาเซตคำตอบของสมการ $27^{\frac{1}{x}} = 9^{x+\frac{1}{2}}$

12. จงแก้ระบบสมการ $2^x \cdot 3^y = 48$ และ $3^x \cdot 2^y = 162$

13. จงหาเซตคำตอบของสมการ $6^x + 6 = 2^{x+1} + 3^{x+1}$

14. จงหาเซตคำตอบของสมการ $4(8^x + 8^{-x}) = 13(2^x + 2^{-x})$

สมการลอการิทึม

สมการลอการิทึม คือสมการที่มีตัวแปรอยู่ในลอการิทึม ก่อนแก้ต้องเขียนเงื่อนไขโดเมน คือสิ่งที่อยู่หลัง $\log$ ต้องเป็นบวก และถ้าฐานมีตัวแปร ฐานต้องเป็นบวกและไม่เท่ากับ 1

$$\log_a f(x) = c \Leftrightarrow f(x) = a^c$$

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) \text{ เมื่อ } f(x) > 0 \text{ และ } g(x) > 0$$

รวมเป็น $\log$ เดียวด้วย $\log_a M + \log_a N = \log_a MN$ และ $\log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N}$ ทำฐานให้เท่ากันด้วย $\log_{a^k} M = \frac{1}{k} \log_a M$ ถ้ามี $\log$ รูปเดียวกันหลายตัวให้แทนด้วย $u = \log_a x$

ตรวจคำตอบทุกครั้ง การรวม $\log_a M + \log_a N$ เป็น $\log_a MN$ ทำให้โดเมนกว้างขึ้น เพราะถ้า M และ N เป็นลบทั้งคู่ก็ยังได้ $MN > 0$ จึงอาจได้คำตอบเกิน ต้องนำคำตอบไปเทียบกับเงื่อนไขโดเมนของสมการเดิมเสมอ

ตัวอย่าง

จงแก้สมการ $\log_2(x-2) + \log_2(x+5) = 3$

วิธีทำ เงื่อนไข $x-2 > 0$ และ $x+5 > 0$ นั่นคือ $x > 2$ รวม $\log$ ได้

$$\log_2((x-2)(x+5)) = 3$$

จึงได้ $(x-2)(x+5) = 2^3 = 8$ หรือ $x^2 + 3x - 18 = 0$ แยกตัวประกอบได้ $(x+6)(x-3) = 0$

ได้ $x = 3$ หรือ $x = -6$ แต่ $x = -6$ ขัดกับ $x > 2$ ดังนั้นคำตอบคือ $x = 3$

โจทย์

1. จงแก้สมการ $\log_5(2x+3) = 2$

2. จงแก้สมการ $\log_x \frac{1}{27} = -\frac{3}{2}$

3. จงหาเซตคำตอบของสมการ $\log_5(x^2 - 4x) = \log_5(x + 6)$

4. จงแก้สมการ $2 \log_2 x - \log_2(x + 4) = 1$

5. จงแก้สมการ $\log_2(x - 1) = \log_4(x + 11)$

6. จงหาเซตคำตอบของสมการ $\log_3 x \cdot \log_3(9x) = 8$

7. จงหาเซตคำตอบของสมการ $x^{\log_2 x} = 8x^2$

8. จงหาเซตคำตอบของสมการ $\log_2(3 \cdot 2^x - 8) = 2x - 2$

9. จงแก้ระบบสมการ $\log_x y + 2 \log_y x = 3$ และ $x^2 + y = 20$

โจทย์ผสม

1. จงแก้สมการ $\log_3(3^x + 18) = x + 1$

2. จงแก้สมการ $4^{\log_2 x} - 3x = 10$

3. จงแก้ระบบสมการ $2^x \cdot 8^y = 128$ และ $\log_2 x + \log_2 y = 1$

4. จงหาค่า k ที่ทำให้สมการ $\log_2(4^x + 16) = x + \log_2 k$ มีคำตอบเพียงคำตอบเดียว และหาคำตอบนั้น

5. จงหาเซตคำตอบของสมการ $\log_2 x + \log_5 x = \log_2 x \cdot \log_5 x$

6. จงหาเซตคำตอบของสมการ $\log_2(x^2 - 3) = \log_3(x^2 + 2)$

7. จงหาเซตคำตอบของสมการ $\log_{2x} 4 + \log_{4x} 16 = 4$

8. จงแก้สมการ $\log_2(\log_3(9^x - 3^x + 3)) = 1$

9. จงหาผลบวกของคำตอบทั้งหมดของสมการ $4^x - 7 \cdot 2^x + 5 = 0$

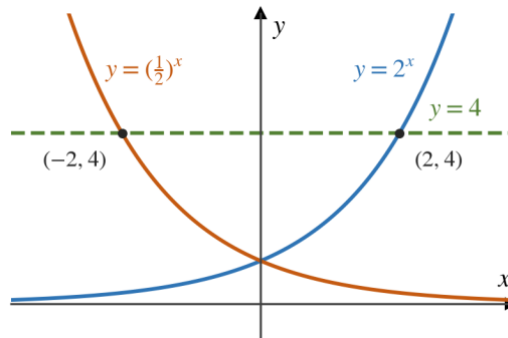
10. จงหาเซตคำตอบของสมการ $2^x - 1 = \log_2(x + 1)$

อสมการเอกซ์โพเนนเชียลและอสมการลอการิทึม

อสมการเอกซ์โพเนนเชียล

อสมการเอกซ์โพเนนเชียล คืออสมการที่มีตัวแปรอยู่ในเลขชี้กำลัง วิธีหลักคือจัดทั้งสองข้างให้เป็นฐานเดียวกัน แล้วเปรียบเทียบเลขชี้กำลัง โดยดูว่าฐานมากกว่า 1 (ฟังก์ชันเพิ่ม) หรืออยู่ระหว่าง 0 กับ 1 (ฟังก์ชันลด) เช่น จากกราฟ

$$2^x > 4 \text{ เมื่อ } x > 2 \text{ แต่ } \left(\frac{1}{2}\right)^x > 4 \text{ เมื่อ } x < -2$$



ถ้า $a > 1$ แล้ว $a^u < a^v \Leftrightarrow u < v$ (เครื่องหมายคงเดิม)

ถ้า $0 < a < 1$ แล้ว $a^u < a^v \Leftrightarrow u > v$ (กลับเครื่องหมาย)

ถ้าฐานต่างกัน ให้ใส่ $\log$ ทั้งสองข้าง เช่น $a^x < b \Leftrightarrow x \log a < \log b$ เมื่อ $b > 0$ (เครื่องหมายคงเดิม เพราะ $\log$ ฐาน 10 เป็นฟังก์ชันเพิ่ม)

ตัวอย่าง

จงแก้สมการ $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-4} \geq 3^{3x}$

วิธีทำ เขียนทั้งสองข้างเป็นฐาน $\frac{1}{3}$ โดย $3^{3x} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3x}$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-4} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{-3x}$$

ฐาน $\frac{1}{3}$ อยู่ระหว่าง 0 กับ 1 จึงกลับเครื่องหมาย ได้ $x^2 - 4 \leq -3x$

$$x^2 + 3x - 4 \leq 0 \Rightarrow (x + 4)(x - 1) \leq 0$$

ดังนั้นเซตคำตอบคือ $[-4, 1]$

ข้อควรระวัง เมื่อแทน $u = a^x$ ต้องจำว่า $u > 0$ เสมอ ถ้าแก้ได้ $u < -1$ หรือ $u > 3$ ช่วง $u < -1$ ต้องตัดทิ้งเหลือ $a^x > 3$ และเมื่อหารด้วยจำนวนลบ เช่น $\log 0.5$ ต้องกลับเครื่องหมายด้วย

ข้อสังเกต เมื่อ $a > 0$ จะได้ $a^x > 0$ ทุกจำนวนจริง x ดังนั้น $2^x > -5$ จริงทุก x (เซตคำตอบคือ $\mathbb{R}$) ส่วน $3^x \leq 0$ ไม่มีคำตอบ (เซตคำตอบคือ $\emptyset$) ถ้าข้างหนึ่งไม่เป็นบวก ห้ามใส่ $\log$ ทั้งสองข้าง

โจทย์

1. จงแก้สมการ $2^{3x-1} > 32$

2. จงแก้สมการ $(0.25)^x < 8$

3. จงแก้สมการ $5^{x^2+x} \leq 25^{x+3}$

4. จงแก้สมการ $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x-1} > \left(\frac{9}{4}\right)^{x-3}$

5. จงแก้สมการ $3^{x+1} - 3^{1-x} \geq 8$

6. ปล่องลูกบอลจากความสูง h ทุกครั้งที่ตกกระทบพื้น ลูกบอลจะกระดอนขึ้นสูงเป็น 60% ของครั้งก่อน จงหาจำนวนเต็ม n ที่น้อยที่สุดที่การกระดอนครั้งที่ n สูงน้อยกว่า 0.1% ของ h
กำหนด $\log 2 \approx 0.3010$ และ $\log 3 \approx 0.4771$

7. จงแก้สมการ $3^{|x-2|} < 9^{x-1}$

8. จงแก้สมการ $(x^2 - x + 1)^{x+2} < 1$

9. จงแก้สมการ $5^{x+1} - 5^{x-1} \geq 120$

10. จงแก้สมการ $\frac{1}{2} < 2^{x^2-2x} \leq 8$

11. จงแก้สมการ $2^{3x} > 3^{x+2}$ โดยตอบในรูป
ลอการิทึม

12. จงแก้สมการ $2^x + 3^x < 13$

13. จงแก้สมการ $4^x + 6^x < 2 \cdot 9^x$

อสมการลอการิทึม

อสมการลอการิทึม คืออสมการที่มีตัวแปรอยู่ในลอการิทึม ขั้นแรกต้องหาโดเมนก่อนเสมอ คือสิ่งที่อยู่ในลอการิทึมต้องเป็นบวก (ถ้าฐานมีตัวแปร ฐานต้องเป็นบวกและไม่เท่ากับ 1) จากนั้นจึงเปรียบเทียบตามฐาน แล้วนำคำตอบไปตัดกับโดเมน

ถ้า $a > 1$ แล้ว $\log_a u < \log_a v \Leftrightarrow 0 < u < v$

ถ้า $0 < a < 1$ แล้ว $\log_a u < \log_a v \Leftrightarrow u > v > 0$ (กลับเครื่องหมาย)

เขียนค่าคงที่เป็นลอการิทึมฐานเดียวกัน $c = \log_a a^c$ เช่น $3 = \log_2 8$ และ $-2 = \log_{\frac{1}{3}} 9$

ตัวอย่าง

จงแก้สมการ $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) + \log_{\frac{1}{2}}(x+1) \geq -3$

วิธีทำ หาโดเมนก่อน: $x-1 > 0$ และ $x+1 > 0$ จึงได้ $x > 1$

รวมลอการิทึม และเขียน $-3 = \log_{\frac{1}{2}} 8$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 1) \geq \log_{\frac{1}{2}} 8$$

ฐาน $\frac{1}{2}$ น้อยกว่า 1 จึงกลับเครื่องหมาย ได้ $x^2 - 1 \leq 8$ หรือ $-3 \leq x \leq 3$

ตัดกับโดเมน $x > 1$ ดังนั้นเซตคำตอบคือ $(1, 3]$

ข้อควรระวัง หาโดเมนจากโจทย์เดิม ไม่ใช่จากรูปที่รวมแล้ว ในตัวอย่างนี้ถ้าหาโดเมนจาก $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 1)$ จะได้ช่วง $[-3, -1)$ เกินมา ซึ่งผิด เพราะ $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$ หาค่าไม่ได้เมื่อ $x < 1$

โจทย์

1. จงแก้สมการ $\log_3(2x-1) < 2$

2. จงแก้สมการ $\log_{\frac{1}{2}}(x+3) \geq -1$

3. จงแก้สมการ $\log_{\frac{1}{3}}(3x - 5) > \log_{\frac{1}{3}}(x + 1)$

4. จงแก้สมการ $\log_2(x + 5) - \log_2(x - 1) \geq 1$

5. จงแก้สมการ $\log_{0.2}(x^2 - 4x) \geq -1$

6. จงแก้สมการ $(\log_3 x)^2 - \log_3 x^2 < 3$

7. จงแก้สมการ $\log_4(x + 5) + \log_{\frac{1}{2}}(x - 1) > 0$

8. จงแก้สมการ $\log_2 x - 6 \log_x 2 > 1$

โจทย์ผสม

1. จงหาโดเมนของฟังก์ชัน $f(x) = \sqrt{27 - 3^x} + \log_2(x + 2)$

2. จงแก้สมการ $\log_{\frac{1}{3}}(\log_2(x - 1)) \geq -1$

3. จงแก้สมการ $\log_2(4^x - 3 \cdot 2^x + 4) \leq x + 1$

4. จงแก้สมการ $x^{\log_3 2} + 2^{\log_3 x} \leq 16$

5. จงแก้สมการ $(2^x - 8) \cdot \log_{\frac{1}{2}}(x + 1) \geq 0$

6. จงแก้สมการ $\log_{x-1}(x + 1) < 2$

7. จงหาค่า m ทั้งหมดที่ทำให้สมการ $9^x - m \cdot 3^x + m + 3 < 0$ ไม่มีคำตอบเป็นจำนวนจริง

8. จงแก้สมการ $3^{\log_3(x^2-3)} < 2x$

การประยุกต์ของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและลอการิทึม

การเติบโตและการสลายตัว

ปริมาณที่ **เพิ่มขึ้นหรือลดลงเป็นจำนวนเท่าคงที่** ในทุกช่วงเวลาที่ยาวเท่ากัน เช่น จำนวนแบคทีเรีย ประชากร สารกัมมันตรังสี ยาในกระแสเลือด หรือมูลค่าของเครื่องจักร เขียนเป็นฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลของเวลา t ได้

ปริมาณเริ่มต้น A_0 ที่เปลี่ยนเป็น a เท่าทุก ๆ ช่วงเวลา T มีค่า $A(t) = A_0 a^{\frac{t}{T}}$ เป็นการ **เติบโต** เมื่อ $a > 1$ และ **สลายตัว** เมื่อ $0 < a < 1$

ครึ่งชีวิต T คือเวลาที่สารสลายตัวจนเหลือครึ่งหนึ่ง จะได้ $A(t) = A_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ ส่วนปริมาณที่ลดลงร้อยละ p ทุกปี เมื่อผ่านไป n ปีจะเหลือ $A_0 \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n$

แบบต่อเนื่อง $A(t) = A_0 e^{kt}$ ($k > 0$ เติบโต, $k < 0$ สลายตัว) ถ้าต้องการหาเวลา ให้ใส่ $\log$ หรือ $\ln$ ทั้งสองข้างของสมการ

ตัวอย่าง

สารกัมมันตรังสีชนิดหนึ่งมีครึ่งชีวิต 5 วัน นานเท่าใดสารนี้จะเหลือ 10% ของปริมาณเริ่มต้น กำหนด $\log 2 \approx 0.3010$

วิธีทำ ให้ปริมาณเริ่มต้นเป็น A_0 ต้องการ $A_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5}} = \frac{1}{10} A_0$ หรือ $2^{\frac{t}{5}} = 10$ ใส่ $\log$ ทั้งสองข้าง

$$\frac{t}{5} \log 2 = \log 10 = 1$$

$$t = \frac{5}{\log 2} \approx \frac{5}{0.3010} \approx 16.6$$

ดังนั้นใช้เวลาประมาณ 16.6 วัน

ข้อควรระวัง เลขชี้กำลังคือ **จำนวนช่วงเวลา $\frac{t}{T}$** ไม่ใช่ t เช่น ครึ่งชีวิต 8 วัน ผ่านไป 24 วันคือ 3 ช่วง และ “ลดลงร้อยละ 20 ต่อปี” หมายถึงเหลือ 0.8 เท่าของปีก่อน ไม่ใช่ 0.2 เท่า

ตัวอย่าง

ประชากรสัตว์ชนิดหนึ่งเพิ่มเป็น 8 เท่าทุก 6 ปี ในเวลา 4 ปีประชากรจะเพิ่มเป็นกี่เท่า

วิธีทำ ผ่านไป t ปีจะเป็น $8^{\frac{t}{6}} = 2^{\frac{t}{3}}$ เท่า แทน $t = 4$ ได้ $2^2 = 4$ เท่า

ข้อสังเกต ในการ **สลายตัว** แบบเอกซ์โพเนนเชียล เวลาที่ปริมาณสารลดลงจนเหลือครึ่งหนึ่ง (ครึ่งชีวิต) **ไม่ขึ้นกับปริมาณตั้งต้น** เช่น จาก 80 เหลือ 40 กรัม ใช้เวลาเท่ากับจาก 10 เหลือ 5 กรัม และปริมาณจะลดลงเรื่อย ๆ แต่ไม่มีวันเป็นศูนย์

โจทย์

1. แบคทีเรียชนิดหนึ่งเพิ่มจำนวนเป็น 2 เท่าทุก 20 นาที ถ้าเริ่มต้นมี 300 เซลล์ เมื่อเวลาผ่านไป 2 ชั่วโมงจะมีแบคทีเรียกี่เซลล์
2. คาร์บอน-14 มีครึ่งชีวิตประมาณ 5,730 ปี ซากไม้ชิ้นหนึ่งมีคาร์บอน-14 เหลืออยู่ $\frac{1}{8}$ ของปริมาณในต้นไม้ที่ยังมีชีวิต ซากไม้นี้มีอายุประมาณกี่ปี
3. เครื่องจักรราคา 500,000 บาท มีมูลค่าลดลงร้อยละ 20 ต่อปีเมื่อเทียบกับมูลค่าของปีก่อน หลังจากกี่ปีเครื่องจักรนี้จะมีมูลค่าเหลือ 204,800 บาท
4. วางกาแฟร้อนไว้ในห้อง เมื่อผ่านไป t นาที กาแฟมีอุณหภูมิ $\theta(t) = 25 + 60e^{-0.1t}$ องศาเซลเซียส นานเท่าใดกาแฟจึงเย็นลงเหลือ 37 องศาเซลเซียส กำหนด $\ln 5 \approx 1.6094$
5. สารกัมมันตรังสีชนิดหนึ่งเหลือ 80% ของปริมาณเริ่มต้นเมื่อเวลาผ่านไป 3 วัน สารนี้มีครึ่งชีวิตประมาณกี่วัน กำหนด $\log 2 \approx 0.3010$
6. เพาะเชื้อแบคทีเรียที่เพิ่มจำนวนแบบเอกซ์โพเนนเชียล นับได้ 5,000 เซลล์เมื่อผ่านไป 3 ชั่วโมง และ 80,000 เซลล์เมื่อผ่านไป 7 ชั่วโมง จงหาจำนวนเซลล์เริ่มต้น และเวลาที่จำนวนเซลล์ถึง 1,000,000 เซลล์ กำหนด $\log 2 \approx 0.3010$

7. เมือง ก มีประชากร 150,000 คน เพิ่มขึ้นร้อยละ 12 ต่อปี ส่วนเมือง ข มีประชากร 600,000 คน ลดลงร้อยละ 4 ต่อปี อีกประมาณกี่ปีสองเมืองนี้จะมีประชากรเท่ากัน กำหนด $\log 2 \approx 0.3010$, $\log 3 \approx 0.4771$ และ $\log 7 \approx 0.8451$

9. เครื่องกรองกำจัดสารปนเปื้อนได้ 40% ของที่มีอยู่ในแต่ละรอบ ต้องกรองอย่างน้อยกี่รอบ สารปนเปื้อนจึงเหลือไม่เกิน 1% ของเดิม กำหนด $\log 2 \approx 0.3010$ และ $\log 3 \approx 0.4771$

8. ผู้ป่วยได้รับยาครั้งละ 60 มิลลิกรัม ทุก 6 ชั่วโมง ยานี้มีครึ่งชีวิตในร่างกาย 3 ชั่วโมง
ก. ทันทีกหลังได้รับยาครั้งที่ n ในร่างกายมียาที่เหลือกี่มิลลิกรัม
ข. ต้องได้รับยาอย่างน้อยกี่ครั้ง ปริมาณยาทันทีหลังได้รับยาจึงจะเกิน 79 มิลลิกรัม

10. นำขวดน้ำใส่ตู้เย็นที่มีอุณหภูมิคงที่ ผลต่างระหว่างอุณหภูมิน้ำกับตู้เย็นลดลงแบบเอกซ์โพเนนเชียล วัดอุณหภูมิน้ำได้ 30, 18 และ 12 องศาเซลเซียส เมื่อผ่านไป 0, 20 และ 40 นาที จงหาอุณหภูมิในตู้เย็น และเวลาที่น้ำเย็นลงถึง 8 องศาเซลเซียส กำหนด $\log 2 \approx 0.3010$ และ $\log 3 \approx 0.4771$

ดอกเบี้ยทบต้น

ดอกเบี้ยทบต้น คือการนำดอกเบี้ยที่ได้ในแต่ละงวดไปรวมกับเงินต้น แล้วคิดดอกเบี้ยงวดถัดไปจากยอดรวมนั้น เงินรวมจึงเพิ่มขึ้นแบบเอกซ์โพเนนเชียล

ฝากเงินต้น P บาท อัตราดอกเบี้ย r ต่อปี ทบต้นปีละ n ครั้ง เป็นเวลา t ปี จะได้เงินรวม $A = P \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$
ทบต้นต่อเนื่อง ได้เงินรวม $A = Pe^{rt}$ และ อัตราดอกเบี้ยที่แท้จริงต่อปี ของการทบต้นปีละ n ครั้ง คือ $\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n - 1$

ตัวอย่าง

ฝากเงิน 10,000 บาท ได้ดอกเบี้ย 8% ต่อปี ทบต้นทุกปี อย่างน้อยก็ปีจึงจะมีเงินรวมถึง 20,000 บาท กำหนด

$\log 2 \approx 0.3010$ และ $\log 3 \approx 0.4771$

วิธีทำ ต้องการ $10000(1.08)^t \geq 20000$ หรือ $(1.08)^t \geq 2$ ใส $\log$ ทั้งสองข้าง

$$t \log 1.08 \geq \log 2$$

โดย $\log 1.08 = \log 108 - 2 = 2 \log 2 + 3 \log 3 - 2 \approx 0.0333$ จึงได้

$$t \geq \frac{0.3010}{0.0333} \approx 9.04$$

ดังนั้นต้องฝากอย่างน้อย 10 ปี

ข้อควรระวัง เปลี่ยน r เป็นทศนิยมก่อนแทนค่า (8% คือ 0.08) ทบต้นทุก 3 เดือนคือ $n = 4$ และถ้าโจทย์ถามว่า “อย่างน้อยกี่ปี” หรือ “อย่างน้อยกี่งวด” ต้องปัด **จำนวนงวด** ขึ้นเป็นจำนวนเต็มเสมอ เช่น ทบต้นทุกปีแล้วคำนวณได้ 9.04 ก็ต้องตอบ 10 ปี

โจทย์

- ฝากเงิน 20,000 บาท ได้ดอกเบี้ย 6% ต่อปี ทบต้นทุก 6 เดือน เมื่อครบ 2 ปีจะมีเงินรวมกี่บาท กำหนด $(1.03)^4 \approx 1.1255$
- ฝากเงิน 10,000 บาท ในบัญชีที่ทบต้นต่อเนื่อง ด้วยอัตรา 5% ต่อปี เมื่อครบ 20 ปีจะมีเงินรวมประมาณกี่บาท กำหนด $e \approx 2.718$

3. ฝากเงิน 50,000 บาท ทบต้นทุกปี เมื่อครบ 2 ปีมีเงินรวม 62,720 บาท จงหาอัตราดอกเบี้ยต่อปี

4. ฝากเงินในบัญชีที่ให้ดอกเบี้ย 10% ต่อปี ทบต้นทุก 6 เดือน ต้องฝากอย่างน้อยกี่งวด (งวดละ 6 เดือน) หรือนานอย่างน้อยเท่าใด เงินรวมจึงจะเกิน 2 เท่าของเงินต้น กำหนด $\log 2 \approx 0.3010$, $\log 3 \approx 0.4771$, $\log 5 \approx 0.6990$ และ $\log 7 \approx 0.8451$

5. ธนาคาร ก ให้ดอกเบี้ย 12% ต่อปี ทบต้นทุกเดือน ส่วนธนาคาร ข ให้ดอกเบี้ย 12.6% ต่อปี ทบต้นทุกปี ฝากเงินธนาคารใดได้ผลตอบแทนมากกว่า กำหนด $(1.01)^{12} \approx 1.1268$

6. เงินฝากในบัญชีที่ทบต้นต่อเนื่องเพิ่มเป็น 2 เท่าของเงินต้นในเวลา 9 ปี
ก. เงินรวมจะเป็น 8 เท่าของเงินต้นในเวลากี่ปี
ข. เงินรวมจะเป็น 6 เท่าของเงินต้นในเวลาประมาณกี่ปี กำหนด $\ln 2 \approx 0.6931$ และ $\ln 3 \approx 1.0986$

7. พี่ภูผาวางแผนฝากเงินทุกต้นปี ปีละ 10,000 บาท ในบัญชีที่ให้ดอกเบี้ย 8% ต่อปี ทบต้นทุกปี ต้องฝากอย่างน้อยกี่ปี เงินรวม ณ สิ้นปีจึงจะถึง 405,000 บาท กำหนด $\log 2 \approx 0.3010$ และ $\log 3 \approx 0.4771$
8. ฝากเงิน 100,000 บาท ทบต้นต่อเนื่อง ครบ t ปีมีเงินรวม 150,000 บาท ถ้าอัตราดอกเบี้ยเป็น 2 เท่า ครบ t ปีเท่าเดิมจะมีเงินรวมกี่บาท
9. ฝากเงินก้อนหนึ่งในบัญชีทบต้นทุกปี ได้ดอกเบี้ยในปีแรก 2,000 บาท และในปีที่สอง 2,160 บาท จงหาอัตราดอกเบี้ยต่อปีและเงินต้น
10. เลือกรับเงินได้ 3 แบบ แบบที่ 1 รับ 100,000 บาททันที แบบที่ 2 รับ 60,000 บาททันทีและอีก 50,000 บาทเมื่อครบ 2 ปี แบบที่ 3 รับ 120,000 บาทเมื่อครบ 2 ปี ถ้านำเงินที่รับไปฝากทบต้นทุกปีด้วยอัตรา r ต่อปี จงหาช่วงของ r ที่ทำให้แบบที่ 2 มีเงินรวมเมื่อครบ 2 ปีมากที่สุด

มาตราลอการิทึม

ปริมาณที่มีช่วงค่ากว้างมาก เช่น ความเป็นกรด ความดังของเสียง และขนาดแผ่นดินไหว นิยมวัดด้วย **มาตราลอการิทึม** ซึ่งค่าบนมาตราเปลี่ยนไป 1 หน่วย หมายถึงปริมาณจริงเปลี่ยนไปเป็นจำนวนเท่าคงที่

ความเป็นกรด-เบส $pH = -\log[H^+]$ เมื่อ $[H^+]$ คือความเข้มข้นของไฮโดรเจนไอออน (โมลต่อลิตร) สารที่มี pH น้อยกว่า 7 เป็นกรด

ความดังของเสียง $\beta = 10 \log \frac{I}{I_0}$ เดซิเบล (dB) เมื่อ I คือความเข้มเสียง และ $I_0 = 10^{-12}$ วัตต์ต่อตารางเมตร

ขนาดแผ่นดินไหว $M = \log \frac{A}{A_0}$ เมื่อ A คือแอมพลิจูด และพลังงาน E (จูล) สัมพันธ์กับขนาดตาม $\log E = 4.8 + 1.5M$

ค่าบนมาตรา	ปริมาณจริง
pH ลดลง 1	$[H^+]$ เพิ่มขึ้น 10 เท่า
ความดังเพิ่มขึ้น 10 dB	I เพิ่มขึ้น 10 เท่า
ขนาด M เพิ่มขึ้น 1	A เพิ่มขึ้น 10 เท่า และ E เพิ่มขึ้น $10^{1.5} \approx 31.6$ เท่า

ตัวอย่าง

เสียงรบกวนจากเครื่องจักรเข้าสู่อذن 95 dB ส่วนเสียงในห้องสมุด 35 dB ความเข้มเสียงของรบกวนเป็นกี่เท่าของความเข้มเสียงในห้องสมุด

วิธีทำ ให้ความเข้มเสียงของรบกวนและห้องสมุดเป็น I_1 และ I_2 นำระดับเสียงมาลบกัน

$$95 - 35 = 10 \log \frac{I_1}{I_0} - 10 \log \frac{I_2}{I_0} = 10 \log \frac{I_1}{I_2}$$

จึงได้ $\log \frac{I_1}{I_2} = 6$ หรือ $\frac{I_1}{I_2} = 10^6$

ดังนั้นความเข้มเสียงของรบกวนเป็น 1,000,000 เท่าของความเข้มเสียงในห้องสมุด

ข้อควรระวัง ค่าบนมาตราลอการิทึม **บวกกันตรง ๆ ไม่ได้** เช่น ลำโพง 2 ตัวที่ดังตัวละ 80 dB เปิดพร้อมกันไม่ได้ดัง 160 dB แต่ความเข้มรวมเป็น 2 เท่า จึงดัง $80 + 10 \log 2 \approx 83$ dB

เทคนิค ถ้าโจทย์ให้ค่าบนมาตราแล้วถามปริมาณจริง ให้เขียนกลับเป็นเลขยกกำลังของ 10 เช่น $[H^+] = 10^{-pH}$ และ $I = I_0 \cdot 10^{\frac{\beta}{10}}$ ส่วน 0 dB คือ $I = I_0$ ซึ่งเป็นเสียงเบาที่สุดที่หูได้ยิน ไม่ใช่ความเงียบ

โจทย์

1. น้ำส้มชนิดหนึ่งมีความเข้มข้นของไฮโดรเจนไอออน 2×10^{-4} โมลต่อลิตร จงหา pH ของน้ำส้มนี้ กำหนด $\log 2 \approx 0.3010$
2. ขณะแสดงคอนเสิร์ต ความเข้มเสียงบริเวณหน้าเวทีเท่ากับ 10^{-1} วัตต์ต่อตารางเมตร เสียงนี้ดังกี่เดซิเบล
3. น้ำทะเลตัวอย่างหนึ่งมี pH เท่ากับ 8.3 จงหาความเข้มข้นของไฮโดรเจนไอออนในน้ำทะเลนี้ กำหนด $\log 5 \approx 0.6990$
4. พลังงาน E ของแผ่นดินไหวขนาด M เป็นไปตาม $\log E = 4.8 + 1.5M$ และ $M = \log \frac{A}{A_0}$ เมื่อ A คือแอมพลิจูด แผ่นดินไหวครั้งแรกปล่อยพลังงานเป็น 1,000 เท่าของครั้งที่สองซึ่งมีขนาด 4.6 จงหาขนาดของครั้งแรก และแอมพลิจูดของครั้งแรกเป็นกี่เท่าของครั้งที่สอง
5. หูฟังตัดเสียงรบกวนลดความเข้มเสียงจากภายนอกลงเหลือ $\frac{1}{50}$ ของเดิม ระดับเสียงที่ได้ยินลดลงประมาณกี่เดซิเบล กำหนด $\log 2 \approx 0.3010$
6. ผสมสารละลายกรดที่มี pH 2 ปริมาตร 100 มิลลิลิตร กับสารละลายกรดที่มี pH 3 ปริมาตร 800 มิลลิลิตร ถ้าจำนวนโมลของ H^+ รวมกันได้ตรง ๆ จงหา pH ของสารผสม กำหนด $\log 2 \approx 0.3010$

7. ในโรงงานแห่งหนึ่ง เมื่อเปิดเครื่องจักรแบบเดียวกัน 10 เครื่องพร้อมกัน วัดระดับเสียงได้ 90 dB โดยความเข้มเสียงรวมเท่ากับผลบวกของความเข้มเสียงของแต่ละเครื่อง กำหนด $\log 2 \approx 0.3010$
- ก. ถ้าปิดเครื่องจักรไป 5 เครื่อง ระดับเสียงจะเป็นเท่าใด
- ข. ต้องปิดเครื่องจักรอย่างน้อยกี่เครื่อง ระดับเสียงจึงจะต่ำกว่า 85 dB

โจทย์ผสม

1. สารกัมมันตรังสีชนิดหนึ่งมีครึ่งชีวิต 10 ปี ถ้าเขียนปริมาณที่เหลือในรูป $A(t) = A_0 e^{-kt}$ จงหาค่า k และหาว่าเมื่อผ่านไป 30 ปี สารจะเหลือกี่เปอร์เซ็นต์ของปริมาณเริ่มต้น กำหนด $\ln 2 \approx 0.6931$
2. น้ำในบ่อบำบัดมี pH เท่ากับ 4.0 หลังเติมสารปรับสภาพ ความเข้มข้นของ H^+ ลดลงครึ่งหนึ่งทุก 2 วัน อีกประมาณกี่วันน้ำในบ่อจะมี pH เท่ากับ 5.2 กำหนด $\log 2 \approx 0.3010$

3. ธนาคารให้ดอกเบี้ย 8% ต่อปี ทบต้นทุกปี ถ้าต้องการบัญชีทบต้นต่อเนื่องที่ให้เงินรวมเท่ากันเมื่อครบแต่ละปี ต้องใช้อัตราดอกเบี้ยต่อปีประมาณเท่าใด กำหนด $\ln 3 \approx 1.0986$ และ $\ln 5 \approx 1.6094$

5. พลังงาน E ของแผ่นดินไหวขนาด M หาได้จาก $\log E = 4.8 + 1.5M$ แผ่นดินไหวหลักขนาด 7.0 มีอาฟเตอร์ช็อกขนาด 6.0 ตามมา 10 ครั้ง
ก. พลังงานรวมของอาฟเตอร์ช็อกเป็นกี่เท่าของแผ่นดินไหวหลัก
ข. ถ้าพลังงานรวมนี้เกิดจากแผ่นดินไหวครั้งเดียว จะมีขนาดเท่าใด

4. ราคาสินค้าเพิ่มขึ้น 5% ต่อปี ส่วนเงินฝากได้ดอกเบี้ย 8% ต่อปี ทบต้นทุกปี อย่างน้อยกี่ปีเงินฝากจึงจะซื้อสินค้าได้เป็น 2 เท่าของที่ซื้อได้ในวันนี้ กำหนด $\log 2 \approx 0.3010$, $\log 3 \approx 0.4771$, $\log 5 \approx 0.6990$ และ $\log 7 \approx 0.8451$

6. แบคทีเรียในร่างกายผู้ป่วยเพิ่มเป็น 2 เท่าทุก 20 นาที และเมื่อครบทุก 1 ชั่วโมง ผู้ป่วยจะได้รับยาซึ่งฆ่าแบคทีเรียที่มีอยู่ขณะนั้นทันที 90% เริ่มต้นมีแบคทีเรีย 10^6 เซลล์ กำหนด $\log 2 \approx 0.3010$
ก. ต้องได้รับยาอย่างน้อยกี่ครั้ง จึงเหลือแบคทีเรียน้อยกว่า 10^5 เซลล์
ข. ยาต้องฆ่าได้มากกว่ากี่เปอร์เซ็นต์ จำนวนแบคทีเรียจึงลดลงทุกชั่วโมง

7. กู้เงิน 1,000,000 บาท ดอกเบี้ย 8% ต่อปี ทบต้นทุกปี แล้วผ่อนชำระทุกสิ้นปี ปีละ 100,000 บาท โดยงวดสุดท้ายจ่ายเท่าที่เหลือ ต้องผ่อนกี่ปีจึงจะหมดหนี้ กำหนด $\log 2 \approx 0.3010$ และ $\log 3 \approx 0.4771$

9. สารละลายชนิดหนึ่งมี $[H^+][OH^-] = 10^{-14}$ และมี $[OH^-]$ มากเป็น 500 เท่าของ $[H^+]$ จงหา pH ของสารละลายนี้ กำหนด $\log 5 \approx 0.6990$

8. ขณะปิดลำโพงในห้อง เสียงดัง 90 dB หลังจากนั้นความเข้มเสียงลดลงแบบ $I = Ae^{-kt}$ เมื่อ A คือความเข้มขณะปิดลำโพง และ t เป็นวินาที ผ่านไป 1.2 วินาทีเสียงเหลือ 30 dB จงหาค่า k และเวลาที่เสียงเหลือ 40 dB กำหนด $\ln 2 \approx 0.6931$ และ $\ln 5 \approx 1.6094$

10. หลังรับประทานยา t ชั่วโมง ความเข้มข้นของยาในเลือดเป็น $C(t) = 80(2^{-\frac{t}{2}} - 2^{-t})$ มิลลิกรัมต่อลิตร กำหนด $\log 2 \approx 0.3010$ และ $\log 3 \approx 0.4771$
 ก. ความเข้มข้นสูงสุดเท่าใด เกิดขึ้นเมื่อใด
 ข. ยาออกฤทธิ์เมื่อ $C(t) \geq 15$ ยาออกฤทธิ์นานประมาณกี่ชั่วโมง