

เรขาคณิตวิเคราะห์

### ระยะห่างระหว่างจุดสองจุด

ระยะห่างระหว่างจุด  $(x_1, y_1)$  และ  $(x_2, y_2)$  คือ  $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

จงใช้สูตรดังกล่าวประยุกต์ใช้เพื่อแก้โจทย์ต่อไปนี้

1. จงหาระยะทางระหว่างจุดกำเนิด  $(0, 0)$  และจุด  $P(-5, 12)$
2. จงหาระยะทางระหว่างจุด  $E(2, -4)$  และ  $F(2, 7)$
3. จงหาความยาวรอบรูปของสามเหลี่ยมที่มีจุดยอด  $A(0, 0)$ ,  $B(3, 0)$ , และ  $C(0, 4)$

4. จงหาความยาวของเส้นทแยงมุมของสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีจุดยอดอยู่ที่  $(1, 1)$ ,  $(5, 1)$ ,  $(5, 4)$ ,  $(1, 4)$

5. จุด  $A(2, y)$  อยู่ห่างจากจุด  $B(5, 6)$  เป็นระยะทาง 5 หน่วย จงหาสมการในการอธิบายค่า  $y$  ที่เป็นไปได้

6.  $P(x, 0)$  อยู่ห่างจากจุด  $A(1, 3)$  และ  $B(5, 3)$  เป็นระยะทางเท่ากัน จงหาค่า  $x$

7. จงหาระยะห่างที่สั้นที่สุดระหว่างจุด  $A(5, 5)$  ไปยังส่วนของเส้นตรง  $y=0$  ที่มีจุดปลายที่  $(0, 0)$  และ  $(4, 0)$

8. จุด  $P$  เป็นจุดบนเส้นตรง  $x = 3$  ซึ่งอยู่ห่างจากจุด  $A(0, 1)$  และ  $B(6, 5)$  เป็นระยะทางเท่ากัน จงหาพิกัดของจุด  $P$

9. จงหาจุด  $P(x, y)$  ที่อยู่บนเส้นตรง  $y = x$  และอยู่ห่างจากจุด  $A(1, 1)$  เป็นระยะทาง 2 เท่าของระยะห่างจากจุด  $B(4, 4)$

### จุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง

จุดกึ่งกลางระหว่างจุด  $A(x_1, y_1)$  และ  $B(x_2, y_2)$  คือ  $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

หรือในกรณีที่  $M$  เป็นจุดที่แบ่งส่วนของเส้นตรงด้วยอัตราส่วนใดๆ สามารถเพิ่มตัวถ่วงน้ำหนักได้

เช่นให้  $AM:MB = m:n$  จะได้ว่า  $M\left(\frac{nx_1+mx_2}{n+m}, \frac{ny_1+my_2}{n+m}\right)$  โดยหลักการจะคล้ายกับโมเมนต์บนคาน

จงใช้ความรู้การหาจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง แก้ปัญหาต่อไปนี้

1. จงหาจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุด  $A(1, 3)$  และ  $B(5, 7)$
2. จงหาจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุด  $C(-2, 4)$  และ  $D(6, 0)$
3. ถ้าจุด  $M(5, 1)$  เป็นจุดกึ่งกลางของ  $AB$  และ  $A(2, 3)$  จงหาพิกัดของจุด  $B$

4. จงหาระยะทางจากจุดกำเนิดไปยังจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุด  $(3, 4)$  และ  $(5, 12)$

5. ถ้าจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง  $A(x, 2)$  และ  $B(6, 4)$  คือ  $(3, y)$  จงหาค่า  $x + y$

6. จุด  $P$  แบ่ง  $AB$  ภายในด้วยอัตราส่วน  $1:1$  จุด  $Q$  แบ่ง  $BC$  ภายในด้วยอัตราส่วน  $1:1$  จงหาความยาว  $PQ$  เมื่อ  $A(1, 0)$ ,  $B(5, 0)$ ,  $C(3, 4)$

7. จงหาพิกัดของจุด P บนเส้นตรง  $y = 2x$  ที่อยู่ห่างจากจุดกึ่งกลางของ A(-2, 0) และ B(2, 4) เป็นระยะทาง 5 หน่วย
8. สามเหลี่ยม ABC มี A(1, 1) และจุดกึ่งกลางของด้าน AB และ AC คือ M(3, 2) และ N(2, 4) จงหาความยาวของด้าน BC
9. จงหาจุด P บนส่วนของเส้นตรง A(-1, 0) และ B(1, 0) ที่ทำให้  $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2$  มีค่าน้อยที่สุด

## เส้นตรง

เส้นตรง เราสามารถเขียนให้อยู่ในรูปสมการเส้นตรง คือ  $y = mx + c$

หรือรูปทั่วไปของสมการเส้นตรง คือ  $Ax + By + C = 0$  เมื่อ A, B, C เป็นค่าคงตัว โดยที่ A และ B ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

ความชันของเส้นตรง หาได้จาก

เมื่อผ่านจุด 2 จุด  $(x_1, y_1)$  และ  $(x_2, y_2)$  ใดๆ ได้ว่าความชัน คือ  $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

เมื่อสมการเส้นตรงอยู่ในรูป  $y = mx + c$  ได้ว่าความชัน คือ  $m$

เมื่อสมการเส้นตรงอยู่ในรูป  $Ax + By + C = 0$  ได้ว่าความชัน คือ  $-\frac{A}{B}$

เมื่อรู้ความชันของเส้นตรงคือ  $m$  และจุดที่ผ่านเพียงจุดเดียว  $(x_1, y_1)$  สามารถหาสมการเส้นตรงได้ว่า

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

จงใช้ความรู้เรื่องเส้นตรงในการแก้ปัญหาต่อไปนี้

1. จงหาสร้างสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด A(1, 2) และ B(5, 10)

2. จงหาสร้างสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด E(5, 7) และ F(5, -3)

3. จงหาความชันของเส้นตรง  $2x + 3y = 6$

4. จงหาความชันของเส้นตรง  $y = 5x - 7$

5. ถ้าเส้นตรงผ่านจุด  $A(2, 5)$  และ  $B(x, 10)$  มีความชันเท่ากับ 2 จงหาค่า  $x$

6. จงหาสมการของเส้นตรงที่มีจุดตัดแกน X เป็น -2 และจุดตัดแกน Y เป็น 3
7. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุดตัดของ  $x + y = 3$  และ  $2x - y = 0$  และมีความชันเท่ากับสมการเส้นตรง  $10x - 2y + 3 = 0$
8. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด  $P(4, 3)$  และทำให้เกิดสามเหลี่ยมกับแกนพิกัดในจุดภาคที่ 1 ที่มีพื้นที่ 24 ตารางหน่วย

เส้นตรงขนานและตั้งฉาก

ให้  $m_1$  และ  $m_2$  เป็นความชันของเส้นตรง  $L_1$  และ  $L_2$  ตามลำดับ จะได้ว่า

เส้นตรง  $L_1$  และ  $L_2$  ขนานกัน เมื่อ  $m_1 = m_2$

เส้นตรง  $L_1$  และ  $L_2$  ตั้งฉากกัน เมื่อ  $m_1 \cdot m_2 = -1$

จงใช้ความรู้ดังกล่าวในการแก้ปัญหาต่อไปนี้

1. ถ้าเส้นตรงผ่านจุด  $A(1, 4)$  และ  $B(5, 6)$  จงหาความชันของเส้นตรงที่ตั้งฉากกับ  $AB$
2. จงหาค่า  $k$  ที่ทำให้เส้นตรง  $y = kx + 1$  ขนานกับเส้นตรงที่ผ่านจุด  $(2, 5)$  และ  $(4, 9)$
3. จงหาค่า  $k$  ที่ทำให้เส้นตรง  $kx + 2y = 5$  ตั้งฉากกับเส้นตรง  $x - 3y = 4$

4. จงหาสมการเส้นตรงที่ตั้งฉากกับ  $x + 2y = 4$  และผ่านจุด  $(-1, 3)$

5. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด  $(0, 0)$  และขนานกับเส้นตรงที่ผ่านจุด  $(5, 1)$  และ  $(2, 7)$

6. กำหนดให้  $A(1, 1)$  และ  $B(5, 5)$  จงหาจุด  $P$  บนเส้นตรง  $x + y = 10$  ที่ทำให้  $AP$  และ  $BP$  ตั้งฉากกัน

7. จงหาสมการของเส้นตรงที่ขนานกับ  $3x + 4y = 0$  และสร้างสามเหลี่ยมกับแกนพิกัดที่มีพื้นที่ 6 ตารางหน่วย

8. จงหาค่า  $k$  ที่ทำให้สามเหลี่ยมที่มีจุดยอด  $A(1, 2)$ ,  $B(k, 0)$ ,  $C(5, 2)$  เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากที่มุม  $A$

9. จงหาสมการของเส้นตรงที่ขนานกับ  $x - 2y = 0$  และแบ่งครึ่งพื้นที่ของสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีจุดยอด  $(0, 0)$ ,  $(4, 0)$ ,  $(4, 4)$ ,  $(0, 4)$

### ระยะห่างระหว่างเส้นตรงกับจุด

ระยะห่างระหว่างจุด  $(x_1, y_1)$  กับเส้นตรง  $Ax + By + C = 0$  หาได้จาก  $d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

จงใช้สูตรการหาระยะห่างระหว่างจุดกับเส้นตรงในการแก้โจทย์ต่อไปนี้

1. จงหาระยะห่างจากจุด  $P(1, 2)$  ไปยังเส้นตรง  $3x + 4y - 10 = 0$

2. จงหาระยะห่างจากจุด  $A(-1, 3)$  ไปยังเส้นตรง  $x - 2y + 5 = 0$

3. จงหาระยะห่างจากจุด  $B(4, 0)$  ไปยังเส้นตรง  $y = 3x - 1$

4. เส้นตรง L ผ่านจุด  $(2, 0)$  และ  $(0, 4)$  จงหาระยะห่างจากจุด  $P(1, 1)$  ไปยังเส้นตรง L

5. จุด  $P(k, 1)$  อยู่ห่างจากเส้นตรง  $3x + 4y - 8 = 0$  เป็นระยะทาง 2 หน่วย จงหาค่า  $k$  ที่เป็นไปได้

6. จงหาระยะห่างจากจุด  $A(1, 1)$  ไปยังเส้นแบ่งครึ่งตั้งฉากของส่วนของเส้นตรงที่เชื่อม  $B(0, 0)$  และ  $C(2, 4)$

ระยะห่างระหว่างเส้นตรงที่ขนานกัน

ระยะห่างระหว่างจุด  $Ax + By + C_1 = 0$  กับเส้นตรง  $Ax + By + C_2 = 0$  หาได้จาก  $d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

จงใช้สูตรการหาระยะห่างระหว่างเส้นตรงที่ขนานกันในการแก้โจทย์ต่อไปนี้

1. จงหาระยะห่างระหว่างเส้นตรง  $5x - 12y + 1 = 0$  และ  $5x - 12y - 12 = 0$

2. จงหาระยะห่างระหว่างเส้นตรง  $4x + 3y = 7$  และ  $4x + 3y = 17$

3. จงหาระยะห่างระหว่างเส้นตรง  $2x + 3y = 6$  และ  $4x + 6y = 1$

4. จงหาค่า  $k$  ที่ทำให้ระยะห่างระหว่าง  $3x - 4y + 1 = 0$  และ  $3x - 4y + k = 0$  เท่ากับ 2 หน่วย
5. จงหาสมการของเส้นตรงที่อยู่ตรงกลางระหว่าง  $4x + 3y - 1 = 0$  และ  $4x + 3y - 11 = 0$
6. จงหาสมการของเส้นตรงที่ขนานกับ  $y = 3x$  และมีระยะห่างจากจุด  $(1, 1)$  เป็น 2 เท่าของระยะห่างจากเส้นตรง  $y = 3x - 1$

7. จงหาจุด P บนเส้นตรง  $x + y = 10$  ที่ทำให้ระยะห่างจาก P ไปยังเส้นตรง  $3x - 4y = 0$  และ  $3x - 4y = 20$  เป็นระยะทางเท่ากัน

8. จงพิสูจน์สูตร  $d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$  โดยเริ่มจากสมการ  $Ax + By + C_1 = 0$  และใช้จุด  $P(x_0, y_0)$  บนเส้นตรงที่สอง  $Ax + By + C_2 = 0$

ภาคตัดกรวย

## วงกลม

วงกลม คือ เซตของจุดทั้งหมดในระนาบที่ห่างจากจุด ๆ หนึ่งที่ตรึงอยู่กับที่เป็นระยะทางคงที่ จุดที่ตรึงอยู่กับที่นี้เรียกว่า จุดศูนย์กลาง (center) ของวงกลม และระยะทางจากจุดศูนย์กลางไปยังจุดใด ๆ ในเซตเรียกว่า รัศมี (radius) ของวงกลม

โดยวงกลมมีสมการมาตรฐานคือ  $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

โดยมีจุดศูนย์กลางของวงกลมคือ  $(h, k)$  และรัศมีมีขนาดเท่ากับ  $r$

จงใช้ความรู้เรื่องวงกลม แก้โจทย์ต่อไปนี้

1. จงหาสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่  $(0, 0)$  และรัศมี  $r = 5$
2. จงหาสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่  $(5, -2)$  และผ่านจุด  $(5, 1)$
3. จงหาสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่  $(h, k)$  และมีแกน X เป็นเส้นสัมผัส โดย  $h=3, k=4$

4. จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลม  $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 16$

5. จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลม  $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 6 = 0$

6. จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลม  $2x^2 + 2y^2 - 4x + 8y - 2 = 0$

7. จงหาสมการวงกลมที่มีส่วนของเส้นตรง  $A(0, 0)$  และ  $B(6, 8)$  เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง

8. จุดศูนย์กลางของวงกลม  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$  คือ  $(3, 4)$  และรัศมีคือ 5 จงหาค่า  $C$

9. จงหาสมการวงกลมที่ล้อมรอบสามเหลี่ยมที่มีจุดยอด  $A(0, 0)$ ,  $B(4, 0)$ ,  $C(0, 6)$

[ Hint: เมื่อวงกลมล้อมรอบสามเหลี่ยมมุมฉาก ด้านตรงข้ามมุมฉากคือเส้นผ่านศูนย์กลาง ]

10. จงหาสมการวงกลมที่มีรัศมี  $r=5$  และสัมผัสกับเส้นตรง  $3x + 4y - 1 = 0$  ที่จุด  $(1, -0.5)$

11. จงหาค่า  $k$  ที่ทำให้วงกลม  $C_1: x^2 + y^2 = 1$  และ  $C_2: (x - 3)^2 + y^2 = k$  สัมผัสกัน  
ภายนอก

12. จงหาสมการของวงกลมที่มีรัศมีน้อยที่สุดที่ผ่านจุด  $A(1, 2)$  และ  $B(3, 4)$

## วงรี

วงรี คือ เซตของจุดทั้งหมดในระนาบซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุดใด ๆ ในเซตนั้นไปยังจุดที่ตรึงอยู่กับที่สองจุดมีค่าคงตัว โดยค่าคงตัวนี้ต้องมากกว่าระยะห่างระหว่างจุดที่ตรึงอยู่กับที่ทั้งสองจุด เรียกจุดที่ตรึงอยู่กับที่ทั้งสองจุดนี้ว่า โฟกัส (focus) ของวงรี

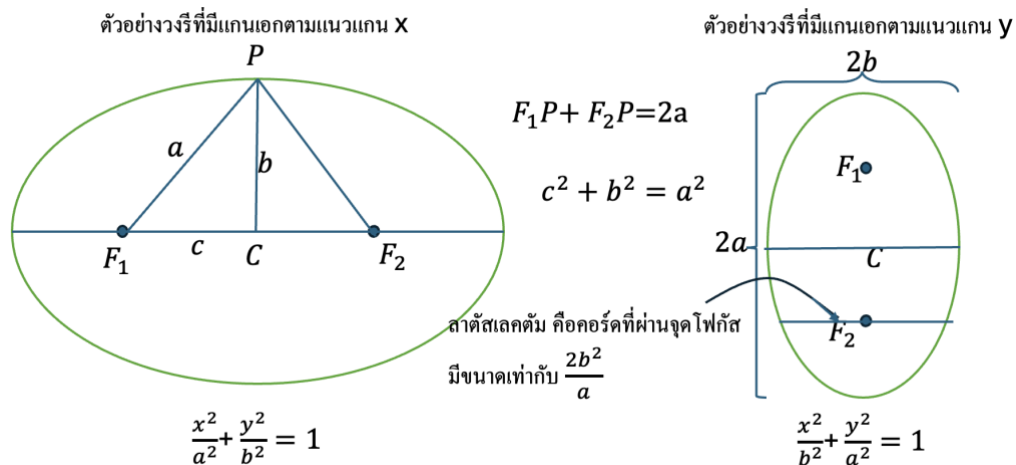
## นิยาม

ให้ความยาวแกนเอก ( $2a$ ) คือความยาวแกนที่ยาวกว่า และจุดยอดคือจุดทั้ง 2 ฝั่งของแกนเอก

ความยาวแกนโท ( $2b$ ) คือความยาวแกนที่สั้นกว่า

และจากสามเหลี่ยมพีทาโกรัสดังรูปได้ว่า  $a^2 = c^2 + b^2$

ความเยื้องศูนย์กลาง  $e = \frac{c}{a}$



จงใช้ความรู้เรื่องวงรี แก้โจทย์ต่อไปนี้

1. จงหาจุดศูนย์กลาง, จุดยอด, จุดโฟกัส, ความยาวแกนเอก/แกนโท และความเยื้องศูนย์กลางของวงรี ของ

$$\text{วงรี } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

2. จงหาจุดศูนย์กลาง, จุดยอด, จุดโฟกัส, ความยาวแกนเอก/แกนโท และความเยื้องศูนย์กลางของวงรี ของวงรี  $4x^2 + 9y^2 = 36$

3. จงหาสมการวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่  $(0, 0)$ , จุดยอดที่  $(0, \pm 5)$ , และจุดโฟกัสที่  $(0, \pm 3)$

4. จงหาสมการวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่  $(-3, 1)$ , จุดโฟกัสที่  $(-3, 5)$  และความยาวแกนเอก 10 หน่วย

5. จุด  $P(x, y)$  อยู่บนวงรี  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$  จงหาผลบวกของ  $F_1P + F_2P$  เมื่อ  $F_1, F_2$  คือโฟกัส

6. จงหาสมการวงรีที่เป็นไปได้ที่มีจุดศูนย์กลางที่  $(2, -1)$ , สัมผัสแกน X และแกน Y

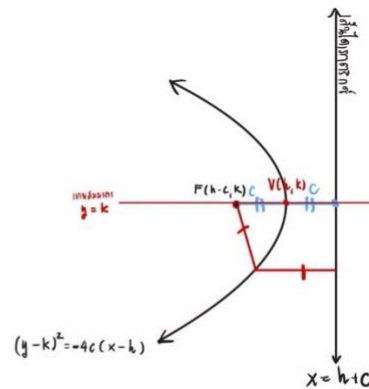
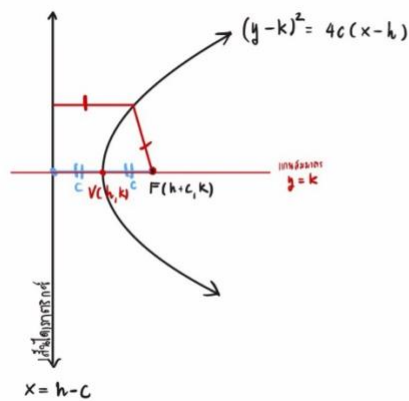
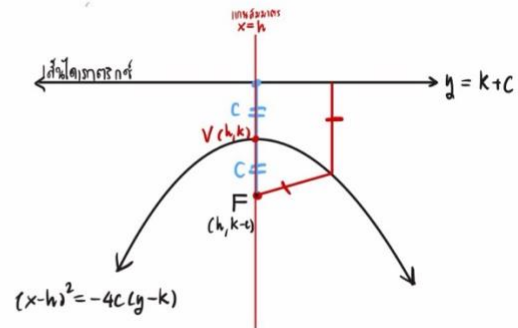
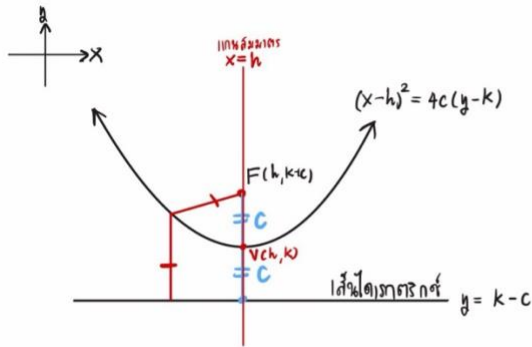
7. จงหาพื้นที่ของสี่เหลี่ยมที่เกิดจากการเชื่อมจุดปลายเลตัสแรกตัมทั้งสี่ของวงรี  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$

8. จงหาสมการทางเดินของจุด  $P(x, y)$  ที่มีอัตราส่วนของระยะห่างจาก  $P$  ไปยังจุด  $F(3, 0)$  ต่อระยะห่างจาก  $P$  ไปยังเส้นตรง  $x = \frac{25}{3}$  เท่ากับ  $\frac{3}{5}$

9. จงหาความยาวของคอร์ดีที่เกิดจากการตัดกันของวงรี  $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$  กับเส้นตรง  $y = 3$

## พาราโบลา

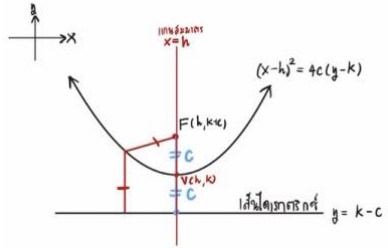
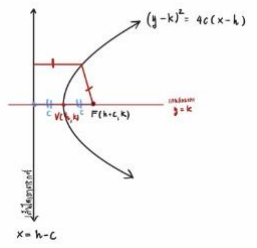
พาราโบลา คือ เซตของจุดทั้งหมดในระนาบซึ่งห่างจากจุดที่ตรึงอยู่กับที่จุดหนึ่งและเส้นตรงที่ตรึงอยู่กับที่เส้นหนึ่ง เป็นระยะเท่ากัน จุดที่ตรึงอยู่กับที่นี้ เรียกว่า โฟกัสของพาราโบลา และเส้นที่ตรึงอยู่กับที่นี้เรียกว่า เส้นไดเรกทริกซ์ของพาราโบลา



สรุปค่าต่าง ๆ ของสมการพาราโบลาแต่ละแบบ เมื่อ  $c$  เป็นได้ทั้งค่าบวกและลบ

[ เมื่อค่า  $c$  เป็นลบสะท้อนกราฟข้ามเส้นตรงที่ผ่านจุดยอดและขนานกับเส้นไดเรกทริกซ์ ]

[ Note: พยายามมองเป็นรูปออกมา และใช้ความเข้าใจเพื่อจะได้ไม่ต้องจำในภายหลัง ]

สมการ	$(x - h)^2 = 4c(y - k)$	$(y - k)^2 = 4c(x - h)$
รูปร่างกราฟเมื่อ $c > 0$		
ความยาวโฟกัส	$c$	$c$
พิกัดจุดยอด	$(h, k)$	$(h, k)$
จุดโฟกัส	$(h, k + c)$	$(h + c, k)$
เส้นไดเรกทริกซ์	$y = k - c$	$x = h - c$
ความยาวเลตัสเรกตัม	$4 c $	$4 c $

จงใช้ความรู้เรื่องพาราโบลา แก้โจทย์ต่อไปนี้

1. จงหาจุดยอด, จุดโฟกัส, และสมการไดเรกทริกซ์, ความยาวเลตัสเรกตัม ของพาราโบลา  $y^2 = 8x$

2. จงหาจุดยอด, จุดโฟกัส, และสมการไดเรกทริกซ์, ความยาวเลตัสเรกตัม  
ของพาราโบลา  $(x - 1)^2 = 4(y + 2)$

3. จงหาจุดยอด, จุดโฟกัส, และสมการไดเรกทริกซ์, ความยาวเลตัสเรกตัม  
ของพาราโบลา  $y^2 - 4y + 12 = 8x$

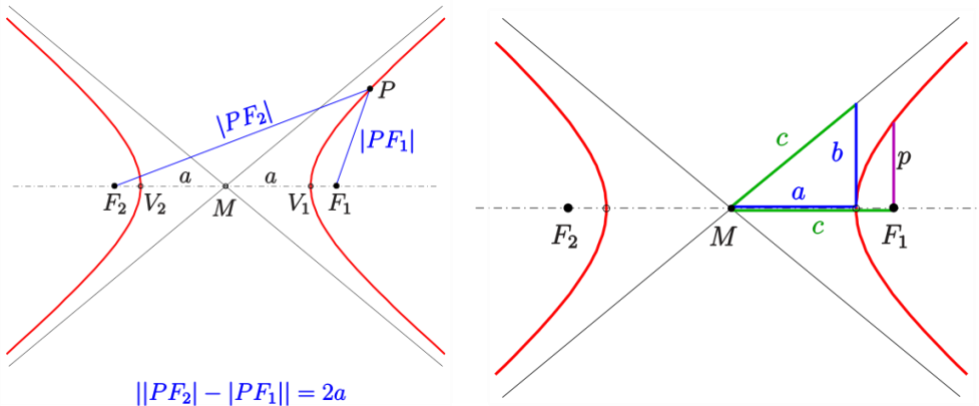
4. จงหาสมการของเส้นตรงที่ผ่านโฟกัสของ  $x^2 = 4y$  และขนานกับไตเรกตริกซ์
5. จงหาสมการไตเรกตริกซ์ของพาราโบลาที่เกิดจากการเลื่อนขนาน พาราโบลา  $x^2 = -12y$  โดยมีจุดยอดใหม่ที่  $(-3, 5)$
6. จงหาสมการเส้นสัมผัสพาราโบลา  $x^2 = -4y$  ที่ผ่านจุด  $(-1, 0)$

7. จงหาสมการพาราโบลาที่ผ่านจุด (1, 1), (2, 3), (3, 7) และมีแกนสมมาตรขนานแกน Y

8. กำหนดให้  $y = ax^2 + bx + c$  เป็นสมการพาราโบลา จงหาความสัมพันธ์ระหว่าง a, b, c กับจุดยอดและโฟกัสของพาราโบลานี้

## ไฮเพอร์โบลา

ไฮเพอร์โบลา คือ เซตของจุดทั้งหมดในระนาบซึ่งผลต่างของระยะทางจากจุดใด ๆ ไปยังจุดที่ตรึงอยู่กับที่ทั้งสองจุด มีค่าเท่ากับ  $2a$  โดยค่าคงตัวนี้ต้องน้อยกว่าระยะห่างระหว่างจุดคงที่ที่ตรึงอยู่กับที่ทั้งสองจุด เรียกจุดที่ตรึงอยู่กับที่ทั้งสองจุดนี้ว่า โฟกัสของไฮเพอร์โบลา



## นิยาม

ให้ความยาวครึ่งแกนตามขวาง (a) คือครึ่งหนึ่งของความยาวที่เชื่อมจุดยอดทั้ง 2

ความยาวครึ่งแกนสังยุค (b) คือครึ่งหนึ่งของความยาวแกนที่ตั้งฉากกับแกนตามขวาง โดยขอบเขตจะไม่เกินเส้นกำกับ

และจากสามเหลี่ยมพีทาโกรัสจัดรูปได้ว่า  $c^2 = a^2 + b^2$

ความเยื้องศูนย์กลาง  $e = \frac{c}{a}$

ความยาวเลตัสเรกตัม คือคอร์ดที่ผ่านจุดโฟกัส มีขนาดคือ  $\frac{2b^2}{a}$

และสร้างสมการเส้นกำกับได้จากการผ่านจุด M และมีความชันคือ  $\pm \frac{\Delta y}{\Delta x}$  ตามแกน a, b [รูปดังตัวอย่าง]

## สมการในการอธิบาย

เมื่อแกนตามขวาง ขนานตามแนวแกน x จะมีสมการในรูปมาตรฐานคือ  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  [รูปดังตัวอย่าง]

เมื่อแกนตามขวาง ขนานตามแนวแกน y จะมีสมการในรูปมาตรฐานคือ  $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

สรุปค่าต่าง ๆ ของสมการไฮเพอร์โบลาแต่ละแบบ เมื่อมีจุดศูนย์กลางที่ (h, k)

[ Note: พยายามมองเป็นรูปออกมา และใช้ความเข้าใจเพื่อจะได้ไม่ต้องจำในภายหลัง ]

สมการ	$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$
ความยาวครึ่งแกนตามขวาง	$a$	$a$
ความยาวครึ่งแกนตั้ง	$b$	$b$
พิกัดจุดยอด	$(h \pm a, k)$	$(h, k \pm a)$
ความยาวโฟกัส	$c = \sqrt{a^2 + b^2}$	$c = \sqrt{a^2 + b^2}$
ความเยื้องศูนย์กลาง	$e = \frac{c}{a}$	$e = \frac{c}{a}$
จุดโฟกัส	$(h \pm c, k)$	$(h, k \pm c)$
ความยาวเลตัสเรกตัม	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2b^2}{a}$
สมการเส้นกำกับ	$y = \pm \frac{b}{a}x$	$y = \pm \frac{a}{b}x$

จงใช้ความรู้เรื่องไฮเพอร์โบลา แก้โจทย์ต่อไปนี้

1. จงหาความยาวครึ่งแกนตามขวาง (a), ครึ่งแกนสังยุค (b), ค่า c (ระยะจากจุดศูนย์กลางถึงโฟกัส), พิกัดจุดโฟกัส (Foci), ความยาวเลตัสเรกตัม, สมการเส้นกำกับ และความเยื้องศูนย์กลาง (e) ของไฮเพอร์โบลา

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

2. จงหาความยาวครึ่งแกนตามขวาง (a), ครึ่งแกนสังยุค (b), ค่า c (ระยะจากจุดศูนย์กลางถึงโฟกัส), พิกัดจุดโฟกัส (Foci), ความยาวเลตัสเรกตัม, สมการเส้นกำกับ และความเยื้องศูนย์กลาง (e) ของไฮเพอร์โบลา

$$\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{144} = 1$$



6. จงหาสมการไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางที่  $(1, 1)$ , แกนตามขวางขนานแกน  $X$ ,  $a=4$ , และมีเส้นกำกับ
- $$y - 1 = \pm \frac{1}{2}(x - 1)$$

7. จงหาสมการไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางที่  $(-2, 3)$ , แกนตามขวางขนานแกน  $Y$ , ลาดัสเรกต์มียาว  $\frac{8}{3}$  หน่วย และ  $c=3$

8. จงพิสูจน์โดยใช้สมการว่า ผลต่างของระยะห่างจากจุด P ใด ๆ บนไฮเพอร์โบลาไปยังจุดโฟกัสทั้งสองมีค่าคงที่เท่ากับ  $2a$

9. จงหาสมการทางเดินของจุด  $P(x, y)$  ที่มีอัตราส่วนของระยะห่างจาก P ไปยังจุด  $F(5, 0)$  ต่ระยะห่างจาก P ไปยังเส้นตรง  $x = \frac{16}{5}$  เท่ากับ  $\frac{5}{4}$

โจทย์เพิ่มเติม

1. กำหนดไฮเพอร์โบลา  $16x^2 - 9y^2 + 128x + 18y + 103$  ให้  $F$  เป็นโฟกัสที่อยู่ในจุดภาคที่ 2 และให้  $C$  เป็นจุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลานี้ จงหาสมการของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด  $C$  และโฟกัสอยู่ที่จุด  $F$

2. กำหนดให้วงรี  $E$  และไฮเพอร์โบลา  $H$  มีโฟกัสร่วมกันคือ  $(0,0)$  และ  $(6,0)$  และระยะทางระหว่างจุดตัดใด ๆ ของ  $E$  และ  $H$  กับจุดโฟกัสทั้งสอง คือ 6 หน่วยและ 2 หน่วย แล้วสมการของวงรี และสมการของไฮเพอร์โบลา คือเท่าใด

3. ให้  $P$  เป็นจุดบนวงรี ซึ่งมีโฟกัสอยู่ที่  $F_1(0, -2)$  และ  $F_2(0, 2)$  ถ้า  $F_1P = 7$  และ  $F_2P = 3$  จงหาสมการวงรีนี้

4. วงกลมที่อยู่เหนือแกน  $X$  ซึ่งสัมผัสกับเส้นตรง  $4y = 3x$  ที่จุด  $(4, 3)$  และสัมผัสกับแกน  $Y$  มีรัศมีเท่ากับเท่าใด

5. กำหนดให้จุด  $(6, 4)$  อยู่บนวงกลม  $C$  ถ้าเส้นผ่านศูนย์กลางสองเส้นของวงกลม  $C$  คือส่วนของเส้นตรง  $2x+y=5$  และ  $x+3y=10$  จงหาสมการวงกลม  $C$

6. ไฮเพอร์โบลารูปหนึ่งมีโฟกัสอยู่ที่จุด  $(-7, 1)$  และ  $(5, 1)$  ถ้าเส้นกำกับเส้นหนึ่งของไฮเพอร์โบลานี้ ขนานกับเส้นตรง  $\sqrt{2}x - y + 5 = 0$  จงหาสมการของไฮเพอร์โบลานี้

7. กำหนดให้  $L_1$  เป็นเส้นตรงซึ่งมีสมการเป็น  $4x - 3y + 10 = 0$  และ  $L_2$  เป็นเส้นสัมผัสของเส้นโค้ง  $y = x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{7}{3}$  ถ้า  $L_2$  ขนานกับ  $L_1$  แล้วจงหาระยะห่างระหว่างเส้นตรง  $L_1$  และ  $L_2$

8. กำหนดให้  $H$  เป็นไฮเพอร์โบลาซึ่งมีสมการเป็น  $9x^2 - 72x - 16y^2 - 32y = 16$  ถ้า  $E$  เป็นวงรี ซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุดโฟกัสของ  $H$  และมีความเยื้องศูนย์กลางเท่ากับ  $\frac{1}{\sqrt{5}}$  จงหาสมการของ  $E$

9. กำหนดพาราโบลามีโฟกัสอยู่ที่จุด  $(8, 1)$  และ  $x = 10$  เป็นเส้นไดเรกทริกซ์ ให้  $P_1$  และ  $P_2$  เป็นจุดตัดของ พาราโบลากับแกน  $Y$  ถ้า  $E$  เป็นวงรีที่ผ่านจุด  $(8, 1)$  และมีโฟกัสอยู่ที่จุด  $P_1$  และ  $P_2$  แล้ว ความยาวแกนเอกของวงรี  $E$  เท่ากับเท่าใด

10. กำหนดให้วงรีรูปหนึ่งมีสมการเป็น  $25x^2 + 100x + 21y^2 - 42y = 404$  จงหาสมการของไฮเพอร์โบล่าที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดโฟกัสทั้งสองของวงรีและผ่านจุด  $(-3, 1 + \sqrt{8})$

11. กำหนดให้  $a > \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$  และ  $A(a, 3), B(7, 8)$  และ  $C(-4, 9)$  เป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมที่มีมุม  $A$  เป็นมุมฉาก ให้  $L$  เป็นสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด  $A$  และจุด  $B$  จงหาจำนวนเต็มบวก  $k$  ที่น้อยที่สุดที่ทำให้พาราโบลา  $ky = x^2 + 2k$  มีจุดร่วมกับเส้นตรง  $L$  เพียงจุดเดียว

12. กำหนดให้  $M(a, b)$  เป็นจุดกึ่งกลางของเส้นตรงที่เชื่อมจุดตัดไฮเพอร์โบลา  $xy = 6$  กับเส้นตรง  $x - y - 1 = 0$  จงหาระยะระหว่างจุด  $M$  กับเส้นตรง  $6x - 8y + 13 = 0$

13. กำหนดให้วงรีมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่  $(0, 0)$  และมีโฟกัส  $F_1$  และ  $F_2$  อยู่บนแกน  $X$  จุด  $A(4, 1)$  เป็นจุดบนวงรี โดยที่ผลบวกระยะทางจากจุด  $A(4, 1)$  ไปยังจุดโฟกัสทั้งสองมีค่าเท่ากับ  $6\sqrt{2}$  ให้เส้นตรง  $L$  ตัดแกน  $X$  ที่จุด  $(4.5, 0)$  และสัมผัสกับวงรีที่จุด  $A(4, 1)$  ถ้า  $d$  เป็นระยะห่าง ระหว่างจุด  $(0, 0)$  กับเส้นตรง  $L$  แล้วค่าของ  $d^2|AF_1||AF_2|$  เท่ากับเท่าใด

14. กำหนดให้  $C$  เป็นเส้นโค้ง  $y = \frac{3x^4 - 2}{x^3}$  เมื่อ  $x > 0$  และให้  $L$  เป็นเส้นตรงที่สัมผัสกับเส้นโค้ง  $C$  ที่จุด  $(1, 1)$  ถ้าเส้นตรง  $L$  ตัดกับพาราโบลา  $x(x - 1) = y - 1$  ที่จุด  $A$  และจุด  $B$  แล้วระยะห่างระหว่างจุด  $A$  และจุด  $B$  เท่ากับเท่าใด