จำนวนเชิงซ้อน

หน่วยจินตภาพ

จะสมมติจำนวนที่ไม่มีอยู่จริงในระบบจำนวนจริง คือ $i = \sqrt{-1}$ หรือ $i^2 = -1$ โดยเรียกว่าเป็นหน่วยจินตภาพ

โดยการคำนวณ i^n สำหรับ n เป็นจำนวนนับ ทำได้จากการสังเกตว่า $i^4 = 1$ และ $i^5 = i = \sqrt{-1}$
ดังนั้นได้ว่า $i^{4n+k} = i^k$ สำหรับ n, k เป็นจำนวนนับ

จงหาค่าจากการคำนวณ i^k ต่อไปนี้

1. i^7

2. i^{67}

3. $i^{2^{69}}$

4. $i^1 + i^2 + i^3 + i^4$

5. $\sum_{k=0}^{69} i^k$

6. $\sum_{k=67}^{420} (-1)^{k+1} i^k$

จำนวนเชิงซ้อน

จำนวนเชิงซ้อน z คือจำนวนที่ประกอบด้วยจำนวนจริงและจำนวนจินตภาพ สามารถเขียนในรูป $z = a + bi$
โดย เรียก a ว่า ส่วนจริงของ z และเขียนแทนด้วย Re(z)
เรียก b ว่า ส่วนจินตภาพของ z และเขียนแทนด้วย Im(z)
และในเรื่องจำนวนเชิงซ้อน สามารถนิยาม $z = (a,\ b)$ แทนการเขียน $z = a + bi$ ได้
และถ้าส่วนจินตภาพเท่ากับ 0 จะเรียกว่า จำนวนจริง
ถ้าส่วนจริงเท่ากับ 0 จะเรียกว่า จำนวนจินตภาพแท้
โดยจำนวนเชิงซ้อนจะเท่ากันก็ต่อเมื่อมีส่วนจริงเท่ากันและส่วนจินตภาพเท่ากัน

จงทำความคุ้นชินกับจำนวนเชิงซ้อนด้วยการแก้โจทย์ปัญหาต่อไปนี้

1. กำหนด z = -5i จงบอก Re(z) และ Im(z)

2. กำหนด z = 7 จงบอก Re(z) และ Im(z)

3. กำหนด $z = 3 + 4i$ จงบอกส่วนจริง และส่วนจินตภาพ

4. จงหาค่าของ $\sqrt{-4}$ ในรูปจำนวนเชิงซ้อน

5. จงหาค่า x, y ที่ทำให้ $x + yi = 2 + 5i$

6. จงหาค่า x, y ที่ทำให้ $2x + 4yi = 10 - 8i$

การดำเนินการบวก ลบ จำนวนเชิงซ้อน

นำส่วนจริงบวก/ลบส่วนจริง ส่วนจินตภาพบวก/ลบกับส่วนจินตภาพ เช่น $(a, b) - (c, d) = (a - c, b - d)$

จงหาผลบวก/ลบจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

1. จงหาค่าของ $(5 - 2i) + (-3 + 7i)$

2. จงหาค่าของ $(10 + 4i) - (2 + i)$

3. จงหาค่าของ $(-1 - i) - (4 - 3i)$

4. จงหาค่าของ $(\mathrm{i} - 2) - (3 - 2\mathrm{i})$

5. กำหนด $z_1 = 2 + 3\mathrm{i}$ และ $z_2 = 4 - \mathrm{i}$ จงหา $z_1 + z_2$

6. กำหนด $z_1 = 1 - 5\mathrm{i}$ และ $z_2 = (-\mathrm{i} - 2) - (-1 - \mathrm{i})$ จงหา $z_1 + z_2$

การดำเนินการคูณจำนวนเชิงซ้อน

การคูณจำนวนเชิงซ้อนจะคล้ายกับการกระจายพหุนาม แต่พจน์ i^2 สามารถยุบพจน์เป็น -1 ได้ โดยจัดให้ผลสำเร็จอยู่ในรูปจำนวนเชิงซ้อน a+bi

ตัวอย่าง

$$(3+2\mathrm{i})(1-4\mathrm{i}) = 3 - 12\mathrm{i} + 2\mathrm{i} - 8i^2 = 3 - 10\mathrm{i} - 8(-1) = 11 - 10\mathrm{i}$$

จงหาใช้การหาผลคูณของจำนวนเชิงซ้อนในการแก้โจทย์ต่อไปนี้

1. จงหาผลคูณ $2(3 + 4i)$

2. จงหาผลคูณ $i(2 - 5i)$

3. จงหาค่าของ $(1 + i)(1 - i)$

4. จงหาค่าของ $(2 + 3i)(4 + i)$

5. จงหาค่าของ $(3 - 2i)^2$

6. จงหาค่าของ $(i + 1)^3$

7. จงหาค่าของ $(2 + i)(3 - i)$

8. จงหาค่าของ $(4 - 3i)^3(4 + 3i)^3$

9. $(a + bi)(a - bi)$ ได้ผลลัพธ์เป็นจำนวนจริงหรือไม่

สังยุค

สังยุคของ z แทนด้วยสัญลักษณ์ $\bar{z}$ หมายถึงการเปลี่ยนเครื่องหมายของส่วนจินตภาพเป็นเครื่องหมายตรงข้าม

เช่น สังยุคของ $4 - 3i$ คือ $4 + 3i$

และจะเห็นได้ว่า $z \cdot \bar{z}$ จะได้จำนวนจริง และ $\bar{\bar{z}} = z$

โดยสังยุคสามารถกระจายใน บวก ลบ คูณ หาร เลขยกกำลังได้

$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ $\qquad$ $\overline{z \times w} = \bar{z} \times \bar{w}$ $\qquad$ $\overline{z^n} = \bar{z}^n$

$\overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w}$ $\qquad$ $\overline{z \div w} = \bar{z} \div \bar{w}$ $\qquad$ $\overline{z^{-1}} = \bar{z}^{-1}$

จงใช้การหาสังยุคในการแก้โจทย์ต่อไปนี้

1. ให้ $z = 3 - 2i$ จงหา $\bar{z}$

2. ให้ $z = -5i$ จงหา $\bar{z}$

3. ให้ $z = 10$ จงหา $\bar{z}$

4. จงหา $\bar{z} + z$, $\bar{z} - z$ และ $\bar{z} \times z$ เมื่อ $z = 2 + 3i$

5. จงหา $\bar{z} + z$, $\bar{z} - z$ และ $\bar{z} \times z$ เมื่อ $z = 4 - i$

6. จงหา $\bar{z} + z$, $\bar{z} - z$ และ $\bar{z} \times z$ เมื่อ $z = -\frac{2}{3}i + 5$

7. หาค่าของ $\overline{2 + 3\imath} - \overline{\imath - 1}$

8. หาค่าของ $\overline{(2 + \imath)(-3\imath + 5) + \overline{\overline{-2\imath}}}$

การดำเนินการหารจำนวนเชิงซ้อน

โดยปกติรูปอย่างง่ายจะทำให้ตัวส่วนไม่ติดจำนวนเชิงซ้อน ซึ่งสามารถทำได้โดยการใช้ $z \cdot \bar{z}$ จะได้จำนวนจริงในการจัดการตัวหาร

ตัวอย่าง $\frac{1}{i+1} = \frac{1}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{1-i}{1-i^2} = \frac{1-i}{2}$

จงใช้การหารจำนวนเชิงซ้อนในการแก้โจทย์ต่อไปนี้

1. หาค่าของ $\frac{1}{2i}$

2. หาค่าของ $\frac{2}{i-3}$

3. หาค่าของ $\frac{i+1}{i-1}$

4. หาค่าของ $\frac{2i+3}{3i-2}$

5. จงหาค่าของ $i - \frac{2+i}{i}$

6. จงหาค่าของ $\frac{3+4i}{4-5i} - \frac{2-3i}{-3i+1}$

7. ให้ $\bar{z}^{-1} = 3 - 2i$ จงหาค่าของ $z^{13Re(z)-3}$

8. ให้ $Im(i\bar{z}) = Re(z)$ จงหาค่าของ $\frac{z}{2Re(z)}$

กราฟและค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนของจำนวนเชิงซ้อน

จำนวนเชิงซ้อนสามารถเขียนในรูปของคู่อันดับ (a,b) และสามารถมีจุดบนระนาบในระบบพิกัดฉากได้ โดยจะเรียกระนาบนี้ว่า **ระนาบเชิงซ้อน** โดยเรียกแกน *X* ว่า **แกนจริง** เรียกแกน Y ว่า **แกนจินตภาพ**

ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน คือระยะห่างระหว่างจุด (0,0) กับจุดนั้นๆ หาได้จาก $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

และจะได้ว่า

$$|z|^2 = z\bar{z} \qquad |z| = |-z| \qquad |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$$

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2| \qquad \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} \qquad |z_1 - z_2| \ge |z_1| + |z_2|$$

จงใช้ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนหาค่าต่อไปนี้

1. จงหาค่าสัมบูรณ์ $|3 + 4i|$

2. จงหาค่าสัมบูรณ์ $|-5 + 12i|$

3. กำหนด $z = 1 + \sqrt{3}i$ จงหา $|z|$

4. จงหาค่าของ $|z^8|$ เมื่อ $z = 1 + i$

5. จงหาค่าของ $\left|\frac{3+i}{4-3i}\right|$

6. หาค่าของ $\left|\frac{3+2i}{2+i}\right|$

7. ถ้า $|z| = 5$ แล้ว $|\bar{z}|$ เท่ากับเท่าใด

8. จงหาค่าสัมบูรณ์ของ $z = (3+4i)(1-i)$

รูปเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อน

หากเรากำหนดให้ r แทนระยะห่างระหว่างจุดกำเนิด O กับ z

และกำหนดให้ θ แทนขนาดของมุมที่วัดทวนเข็มนาฬิกาจากแกน X ทางด้านบวกไปยัง $\overrightarrow{Oz}$

จะได้ความสัมพันธ์ดังนี้

$x = rcos(\theta)$ และ $y = rsin(\theta)$ และ $tan(\theta) = \frac{y}{x} = \frac{Im(z)}{Re(z)}$

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

ดังนั้น $z = a + bi$ สามารถเขียนใหม่ในรูป r และ θ ได้เป็น $z = r(\ cos(\theta) + isin(\theta)\ )$

หรือสามารถเห็นรูปเชิงขั้วในรูป $z = r\angle\theta$ หรือ $z = r\ cis(\theta)$

จงแปลงจำนวนต่อไปนี้ให้เป็นรูปเชิงขั้ว

1. $z = 3 + 4i$
2. $z = 1 + i$
3. $z = -i$
4. $z = -5 - 12i$

5. $z = \sqrt{3} + i$

6. $z = -2 + 3i$

7. $z = -1 + \sqrt{3}i$

8. $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

9. $z = 2i(-1 + i)$

10. $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$

จงแปลงจำนวนรูปเชิงขั้วต่อไปนี้ให้เป็นรูป $z = a + bi$

1. $z = 2(cos60° + isin60°)$
2. $z = 4(cos150° + isin150°)$
3. $z = 6(cos300° + isin300°)$
4. $z = 5(cos90° + isin90°)$
5. $z = 4(cos\frac{5\pi}{6} + isin\frac{5\pi}{6})$
6. $z = 8(cos(-\frac{3\pi}{2}) + isin(-\frac{3\pi}{2}))$

7. $z = 2\angle 30°$

8. $z = \sqrt{2}\angle 270°$

9. $z = 1\angle \pi$

10. $z = 2(cos30° - isin30°)$

11. $z = 2\angle 20°\sqrt{2}\angle 25°$

12. $z = (1 + i)^{10}$

การดำเนินการของรูปเชิงขั้ว

รูปเชิงขั้วจะสามารถคูณ หาร ยกกำลังได้เร็ว ซึ่งสามารถแสดงได้โดยสมบัติตรีโกณ แต่ไม่มีสมบัติการบวก ลบ

สมบัติการสังยุค

$\overline{r_1\angle\theta_1} = r_1\angle(-\theta_1)$

สมบัติการคูณ หารของรูปเชิงขั้ว

$r_1\angle\theta_1 \cdot r_2\angle\theta_2 = r_1r_2\angle(\theta_1+\theta_2)$ $\quad$ $r_1\angle\theta_1 \div r_2\angle\theta_2 = r_1r_2\angle(\theta_1-\theta_2)$

ในการดำเนินการยกกำลัง z^n หาได้จากการคูณ z กัน n ครั้ง

ดังนั้น $(r_1\angle\theta_1)^n = (r_1)^n\angle n\theta_1$

จงใช้การดำเนินการของรูปเชิงขั้วในการแก้โจทย์ต่อไปนี้

1. $z = 5\angle100° \cdot 2\angle50°$
2. $z = 4\angle75° \cdot \overline{0.5\angle15°}$
3. $z = 4\angle75° \div \overline{0.5\angle15°}$
4. $z = \frac{12\angle200°}{3\angle50°}$

5. $z = \frac{1}{2\angle 30°}$

6. $z = (1+i)^{100}$

7. $z = 1\angle 10° \cdot 2\angle 20° \cdot 1\angle 30°$

8. $z = (-1+\sqrt{3}i)^{-50}$

9. $z = \left(\frac{1+i}{-\sqrt{3}i+1}\right)^{-360}$

10. ให้ $z + \frac{1}{z} = 2\frac{Re(z)}{|z|}$ จงหา $z^n + \frac{1}{z^n}$

การหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน

สมมติต้องการหาคำตอบ w ทั้งหมดที่ทำให้ $z = w^n$

จาก $z = r\angle\theta = r\angle(\theta + 2k\pi)$ ดังนั้น w ที่เป็นไปได้ทั้งหมดคือ $w = \sqrt[n]{r}\angle\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$

เมื่อ k, p, q เป็นจำนวนเต็มบวก และเมื่อ $k = p$ และ $k = qn + p$ จะได้ว่ามีคำตอบ w เดียวกัน

จึงจะพิจารณาคำตอบเมื่อ k เป็นสมาชิกของส่วนตกค้าง modulo n ก็เพียงพอ หรือ $k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$

สรุป

รากที่ n ของ z มีทั้งหมด n รากคือ $\sqrt[n]{r}\angle\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$ เมื่อ $k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$

จงใช้การหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนแก้โจทย์ปัญหาต่อไปนี้

1. หารากที่ 2 ของ i
2. หารากที่ 3 ของ $2\angle 60°$
3. หารากที่ 4 ของ 1
4. หารากที่ 4 ของ -81

5. หาผลคูณของรากที่ 4 ทั้งหมดของ $4\angle 225°$

6. หารากที่ 4 ของ $5-12i$

7. หาคำตอบทั้งหมดของ $(z+2i)^3 = 8i$

8. ถ้า $z^3 = 1$ และ $z \neq 1$ จงหาค่าของ $(1-z+z^2)(1+z-z^2)$

สมการพหุนามตัวแปรเดียว

การแก้สมการจะทำเหมือนจำนวนจริง แต่สมการที่มีสัมประสิทธิ์ทุกพจน์เป็นจำนวนจริง และจำนวนเชิงซ้อน z เป็นคำตอบ จะได้ว่า $\bar{z}$ เป็นคำตอบด้วย ซึ่งสามารถพิจารณาได้จาก $(\mathrm{x}-\mathrm{z})(\mathrm{x}-\bar{\mathrm{z}})$ จะได้พหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริงเสมอ

เช่น กำหนดพหุนาม $x^2+1=0$ จะได้ว่า i เป็นคำตอบ และ $-i$ เป็นคำตอบด้วย

จงหาคำตอบต่อไปนี้ในระบบจำนวนเชิงซ้อน

1. $x^3+8=0$

2. ถ้า 2+i เป็นรากหนึ่งของพหุนามดีกรี 2 ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง จงหาอีกรากที่เหลือ

3. จงหาสมการพหุนามกำลังสองที่มี $1+3i$ และ $1-3i$ เป็นคำตอบ

4. จงแก้สมการ
$x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0$

5. ถ้า $1 + 2i$ เป็นรากของ $x^2 + ax + b = 0$ จงหาค่า a และ b

6. ถ้า $2 - i$ เป็นรากของ $x^3 - 4x^2 + x + k = 0$ จงหาค่า k

7. จงแก้สมการ $\bar{z} = z^2$

โจทย์เพิ่มเติม

1. ให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่สอดคล้องกับสมการ $\bar{z} + i|z| = 12 + 9i$ จงหาค่าของ $Im(z)$

2. จงหาจำนวนเชิงซ้อน z ที่สอดคล้องกับสมการ $(\bar{z}|z|)^2 + 2(\bar{z})^3 + z + 2 = 0$

3. จงหาค่าของ $\left|\sqrt{2}\angle\frac{\pi}{8} - 3\angle\frac{3\pi}{8}\right|$

4. จงหาค่าของ $\left(\frac{1+i}{2} - \frac{1}{1+i}\right)^{999}$

5. กำหนดให้ $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - 5$ เมื่อ a, b และ c เป็นจำนวนเต็ม ถ้าสมการ $P(x) = 0$ มีคำตอบ เป็นจำนวนตรรกยะอย่างน้อยหนึ่งตัว และมี $1 + 2i$ เป็นคำตอบของสมการ จงหาเศษจากการหาร $P(x)$ ด้วย $x - 2$

6. กำหนดให้ $A = \{1,2,3,4\}$ ถ้า $S = \{(a, b, c) |\ i^a + i^b + i^c = 1 \wedge a, b, c \in A\}$ จงหาค่าของ $n(S)$

7. จงหาจำนวนเชิงซ้อน z ทั้งหมด ที่สอดคล้องกับสมการ $|z^2 - 1| = iz + 3$

8. ถ้า z เป็นจำนวนเชิงซ้อน ซึ่งสอดคล้องกับสมการ $z + \left|\frac{\bar{z}-1}{z-1}\right| = -3 + 2i$ จงหาค่าของ $|z|$

9. กำหนดให้ $A = \{1,2,3,\ldots,100\}$ และ $B = \left\{k \in A \,\middle|\, \left(\frac{\cos\frac{5\pi}{8} - i\sin\frac{5\pi}{8}}{\cos\frac{3\pi}{4} - i\sin\frac{3\pi}{4}}\right)^k = i\right\}$
จงหาจำนวนสมาชิกของ B

10. กำหนดให้ z_1, z_2 และ z_3 เป็นรากที่ 3 ของจำนวนเชิงซ้อนจำนวนหนึ่ง ถ้า z_1 อยู่ในควอดรันต์ที่ 1 โดยที่ $|z_1| = 2$ และ $z_3 = \overline{z_1}$ แล้วจงหาค่าของ $z_2 + z_3$

11. ให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $|z - 2 + i| = |z + 2 - 2i|$ และ $|z + 1| = |z + i|$ เมื่อ $|z|$ แทนค่าสัมบูรณ์ของ z จงหาค่าของ $|2z|^2$

12. ถ้า A และ B เป็นเซตของจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $A = \{z \mid |z-1| + |z-5| = 6\}$ และ $B = \{z \mid |z-1| - |z-7| = 4\}$ จงหาจำนวนสมาชิกของ $A \cap B$

13. กำหนดให้ $A = \{1,2,3,\ldots,155\}$ ถ้า $B \ = \ \{x \in A \,\Big|\, \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2x-5} = i^{x-2}$ จงหาจำนวนสมาชิกของ B

14. ให้ A และ B เป็นเซตของจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $A = \{z|\ Im(z-2i) + [Re(z)]^2 \leq 0\}$ และ $B = \{z|\ Im(z) \geq 0\}$ จงหาพื้นที่ของบริเวณ $A \cap \ B$ บนพิกัดเชิงขั้ว

15. จงหากราฟแสดงจำนวนเชิงซ้อน z ทั้งหมดที่มีส่วนจริงของ $(z+6i)(\overline{z-4})=0$ ในระนาบเชิงซ้อน

16. กำหนดให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่สอดคล้องกับสมการ $(1+i)\bar{z}+(3-i)z=6+2i$ จงหาค่าของ $|(z-\bar{z})(z+\bar{z})|$

17. ให้ z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $|z_1| = \sqrt{2},\ |z_2| = \sqrt{3}$ และ $|z_1 - z_2| = 1$ แล้ว จงหาค่าของ $|z_1 + z_2|$

18. กำหนดให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่สอดคล้องกับสมการ $(Re(z))(3 + 5i) + (Im(z))(1 - i)^3 = 3 + 7i$ จงหาค่าของ $\frac{1}{z}$