Intro to Set

ความหมายของเซต

เซต คือ กลุ่มของอะไรบางอย่าง โดยสมาชิกในเซตไม่สามารถซ้ำกันได้เช่น

เซตของจำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่า 5 คือ $\{1, 2, 3, 4\}$

เซตของจำนวนเฉพาะบวก คือ {2,3,5,7,11,13,...}

การเขียนเซต เขียนได้ 2 แบบ คือ แบบแจกแจงสมาชิกและ แบบบอกเงื่อนไข

1. แบบแจกแจงสมาชิก เขียนว่ามีสมาชิกอะไรบ้าง เช่น {2,3,5,7,11,13,...}

2. แบบบอกเงื่อนไข เขียนบอกเงื่อนไขของสมาชิกที่จะอยู่ในเซตได้ เช่น

เซตของจำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่า 5 เขียนได้เป็น $\{ x \in \mathbb{N} \mid x < 5\}$

โดยในส่วน $x \in \mathbb{N}$ จะบอกว่าเป็นเซตของ x และกำหนดขอบเขตของ x

และส่วน $x < 5$ จะบอกเงื่อนไขเพิ่มเติม

สัญลักษณ์ของเซตพื้นฐานที่ควรรู้

สัญลักษณ์	ความหมาย
$\mathbb{N}$	เซตของจำนวนนับ
$\mathbb{N}_0$	เซตของจำนวนนับ และ 0 นั่นคือเซตของจำนวนเต็มไม่ลบ
$\mathbb{Z}$ หรือ I	เซตของจำนวนเต็ม
$\mathbb{Z}^+$ หรือ I^+	เซตของจำนวนเต็มบวก
$\mathbb{Q}$	เซตของจำนวนตรรกยะ
$\mathbb{Q}'$	เซตของจำนวนอตรรกยะ
$\mathbb{R}$	เซตของจำนวนจริง
$\mathbb{R}^-$	เซตของจำนวนจริงลบ
$a \in A$	a เป็นสมาชิกในเซต A
$n(A)$ หรือ $\|A\|$	จำนวนสมาชิกของเซต A
$\emptyset$	เซตว่าง หรือ $\{\}$

จงเขียนเซตต่อไปนี้แบบแจกแจงสมาชิก

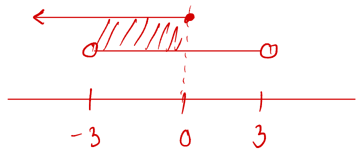
1. $\{x \mid (x \in \mathbb{Z}^+) \wedge (x < 10)\}$

$\{1, 2, 3, \ldots, 9\}$

เงื่อนไข

$y = \cancel{3}, -3$

2. $\{\boxed{y \in \mathbb{Z}^-} \mid y^2 < 9\}$



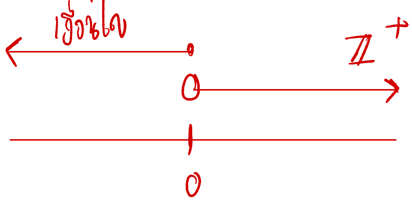
$\{-1, -2\}$

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

3. $\{\boxed{k \in \mathbb{N}} \mid 2k < 5\}$

Ans = $\{1, 2\}$

4. $\{d \in \mathbb{Z}^+ \mid d \leq 0\}$



$\therefore$ Ans = $\{\ \}$

5. $\{x \in \mathbb{R} \mid x = 8\}$

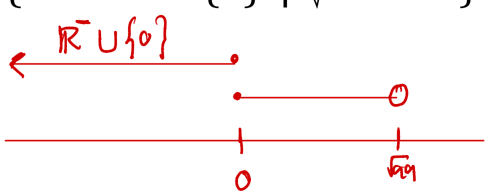
Ans = $\{8\}$

$x = 2, \cancel{-3}$

6. $\{x \in \mathbb{R}^{+} \mid (x - 2)(x + 3) = 0\}$

Ans = $\{2\}$

7. $\{x \in \mathbb{R}^{-} \cup \{0\} \mid \sqrt{x} < 99\}$



Ans = $\{0\}$

เซตที่สมาชิกเป็นเซต

เวลานับนับจำนวนสมาชิก จะนับสมาชิกของเซตที่เป็นสมาชิก

เช่น $S = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}\}$ มี $n(S) = 3$

$S = \{1, \{1\}, \{1, \{1\}\}\}$ มี $n(S) = 3$

$S = \{1, \{\{2, \{3\}\}, \{\{\{4\}\}\}\}\}$ มี $n(S) = 2$ คือ 1 และ $\{\{2, \{3\}\}, \{\{\{4\}\}\}\}$

จงหาจำนวนสมาชิกของเซตต่อไปนี้

1. $\{\overset{1}{\{1\}}, \overset{2}{\{2\}}, \overset{3}{\{3\}}\}$

$n(S) = 3$

2. $\{\{\{\emptyset\}\}\}$

$n(S) = 1$

3. $\{\{1, \emptyset\}, \emptyset\}$

$n(S) = 2$

4. $\{\{1, 2\}, \{3\}\}$

$n(S) = 2$

5. $\{\{1, \{2\}, \{3\}\}\}$

$n(S) = 1$

6. $\{\{\{\}, \{1\}\}, 1\}$

$n(S) = 2$

7. $\{\emptyset, \{\emptyset, 1\}, \{1, 2\}, \{1, \{2, 3\}\}, \{\{1, 2, 3, 4\}, \{\emptyset\}\}\}$

$n(S) = 5$

สมาชิกของเซต

นิยมแทนเซตด้วยอักษรตัวใหญ่ เช่น A, B, C

และนิยมแทนสมาชิกในเซตด้วยอักษรตัวเล็ก เช่น a, b, c

x เป็นสมาชิกของเซต A เราจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $x \in A$

เช่น $1 \in \{1\}$ $\{1\} \in \{\{1\}\}$ $\{1\} \notin \{1\}$ $1 \notin \{\{1\},\{2\}\}$

คำอธิบาย $1 \notin \{\{1\},\{2\}\}$: สมาชิกของ $\{\{1\},\{2\}\}$ คือ $\{1\}$ และ $\{2\}$ แต่ $1 \neq \{1\}$

จงตรวจสอบว่าข้อความต่อไปนี้จริงหรือเท็จ

1. $1 \in \{1, 2, 3, 4\}$

   สมาชิก $\{1,2,3,4\}$ คือ $1, 2, 3, 4$

   $\therefore 1 \in \{1,2,3,4\}$

2. $1 \in \{\{1\}, 2, 3, 4\}$

   สมาชิก $\{\{1\},2,3,4\}$ คือ $\{1\}, 2, 3, 4$

   $1 \neq \{1\}$

   $\therefore 1 \notin \{\{1\},2,3,4\}$

3. $\{1, 2\} \in \{1, 2, 3, 4\}$

   สมาชิก $\{1,2,3,4\}$ คือ $1, 2, 3, 4$

   $\therefore \{1,2\} \notin \{1,2,3,4\}$

4. $\{1,2\} \in \{\{1\},\{2\},3,4\}$

สมาชิก $\{\{1\},\{2\},3,4\}$ คือ $\{1\}, \{2\}, 3, 4$

$\therefore \{1,2\} \notin \{\{1\},\{2\},3,4\}$

5. $\{3,4\} \in \{\{1\},\{2\},\{3,4\}\}$

สมาชิก มี $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3,4\}$

$\therefore \{3,4\} \in \{\{1\},\{2\},\{3,4\}\}$

6. $0 \in \{\}$

$\{\}$ ไม่มีสมาชิก

$\therefore 0 \notin \{\}$

7. $3 \in \boxed{3}$ → ไม่เป็นเซต

$\therefore 3 \notin 3$

8. $\{\} \in \{\}$

$\{\}$ ไม่มีสมาชิก

$\therefore \{\} \notin \{\}$

9. $\{\} \in \{\{\}\}$

$\{\{\}\}$ มีสมาชิกคือ $\{\}$

$\therefore \{\} \in \{\{\}\}$

10. $\{1\} \in \{\, 1,\ \{1,\ 2\},\ \{\{1\}\}\,\}$

$\{1, \{1,2\}, \{\{1\}\}\}$ มีสมาชิกคือ 1, $\{1,2\}$, $\{\{1\}\}$

$\{1\} \notin \{1, \{1,2\}, \{\{1\}\}\}$

11. ถ้า $A \in B$ และ $B \in C$ แล้ว $A \in C$

สมมติ $A = 1$

$B = \{1\}$

$C = \{\{1\}\}$

ได้ว่า $A \in B \wedge B \in C$ แต่ $A \notin C$

เซตที่มีจำนวนสมาชิกมากมายนับไม่ถ้วน เรียกว่า “เซตอนันต์”

เซตที่สามารถระบุจำนวนสมาชิกเป็นตัวเลขได้ จะเรียกว่า “เซตจำกัด”

เช่น $\mathbb{Z}$ เป็นเซตอนันต์ , $\{1, 2, 3, 4, 5,\dots, 100\}$ เป็นเซตจำกัดที่มีสมาชิก 100ตัว

จงหาว่าเซต S เป็นเซตอนันต์หรือเซตจำกัด ถ้าเป็นเซตจำกัดให้หา $n(S)$

1. $\mathbb{R}$

   เซตอนันต์ $n(S) = +\infty$

2. $\{1, 2, 3, 4\}$

   เซตจำกัด $n(S) = 4$

3. $\{x \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq x < 2\}$

   $S = \{0, 1\}$

   เป็นเซตจำกัด $n(S) = 2$

4. $\{x \in \overbrace{\mathbb{R} - \mathbb{R}^{+}}^{R^{-} \cup \{0\}} \mid 0 \leq x\}$

$S = R^{-} \cup \{0\}$ และ สมาชิก ≥ 0

เป็นเซตจำกัด มีสมาชิกแค่ $\{0\}$

5. $\{x \in \mathbb{N}_0 \mid x < 5\}$

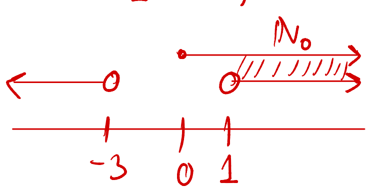
$S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

เป็นเซตจำกัด $n(S) = 5$

6. $\{x \in \mathbb{N}_0 \mid x^2 + 2x > 3\}$

$x^2 + 2x - 3 > 0$

$(x-1)(x+3) > 0$



$S = \{2, 3, 4, \ldots\}$

เป็นเซตอนันต์

สับเซต

เซต A เป็นสับเซตของ**เซต** B ในนิยามมอปลายของไทยกำหนดให้แทนด้วยสัญลักษณ์ $A \subset B$ หมายถึง

$\forall x \in A \rightarrow x \in B$ และ $A \not\subset B$ หมายถึง $\sim(A \subset B)$

เช่น $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$ $\{1, 2, 3, 4\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$

$\{x \mid x^2 = 4\} \not\subset \{1, 2, 3, 4\}$

และกำหนดให้เซตว่างเป็นสับเซตของทุกเซต

เช่น $\emptyset \subset \{1, 2, 3\}$ $\emptyset \subset \emptyset$

และนิยาม A เป็นสับเซตแท้ของ B ว่า $(A \subset B)$ และ $(A \neq B)$

เช่น $\{1, 2, 3, 4\}$ ไม่เป็นสับเซตแท้ของ $\{1, 2, 3, 4\}$

การตรวจสอบว่า $A \subset B$ หรือไม่ ทำได้โดยการตรวจสอบสมาชิกทุกตัวใน A ว่าเป็นสมาชิกใน B ด้วย

ให้ LHS คือฝั่งซ้าย และ RHS คือฝั่งขวา

เช่น $\{\{1\}, \{2\}\} \subset \{\{1\}, \{\{1\}, 2\}, \{1, \{2\}\}\}$

LHS: มีสมาชิก 2 ตัวคือ $\{1\}$ กับ $\{2\}$

RHS: มีสมาชิก 3 ตัวคือ $\{1\}$ กับ $\{\{1\}, 2\}$ และ $\{1, \{2\}\}$

จะเห็นว่า RHS ไม่มี $\{2\}$ เป็นสมาชิก แต่ LHS มี ดังนั้น ไม่เป็นสับเซต

<u>ข้อควรระวังที่หลายคนสับสน</u>

$\in$ ใช้บอกว่า **สมาชิก** $a \in$ เซต A

$\subset$ ใช้บอกว่า **เซต** $B \subset$ เซต A

จงตรวจสอบว่า A เป็นสับเซตของ B หรือไม่

1. $A = \emptyset$, $B = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$

ϕ เป็นสับเซตของทุกเซต

$\therefore A \subset B$

2. $A = \{2\}$, $B = \{2, 4, 6\}$

$[A \subset B] \leftrightarrow [\forall x \in A \rightarrow x \in B]$

จาก $2 \in B$

$\therefore A \subset B$

3. $A = \{1, 3\}$, $B = \{1, 2, 3\}$

$[A \subset B] \leftrightarrow [\forall x \in A \rightarrow x \in B]$

จาก $1 \in B \wedge 3 \in B$

$\therefore A \subset B$

4. $A = \{\{1\}, 3\}$, $B = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$

$[A \subset B] \leftrightarrow [\forall x \in A \rightarrow x \in B]$

จาก $\{1\} \in B$ แต่ $3 \notin B$

$\therefore A \not\subset B$

5. $A = \{\emptyset\}$, $B = \{\{\}, \{0\}, \{1\}\}$

$[A \subset B] \leftrightarrow [\forall x \in A \rightarrow x \in B]$

จาก $\phi \in B$

$\therefore A \subset B$

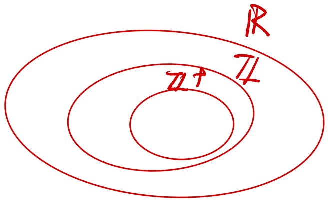
6. $A = \{1, \{2\}, \{1, 2\}\}$, $B = \{1, 2, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

$[A \subset B] \leftrightarrow [\forall x \in A \rightarrow x \in B]$

จาก $(1 \in B) \wedge (\{2\} \in B) \wedge (\{1, 2\} \in B)$

$\therefore A \subset B$

7. $A = \mathbb{Z}^{+}$, $B = \mathbb{R}$



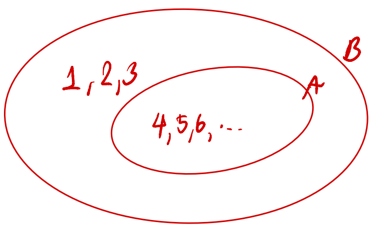
จาก Venn Euler diagram

$\forall x \in \mathbb{Z}^{+} \rightarrow x \in \mathbb{R}$

$\therefore \mathbb{Z}^{+} \subset \mathbb{R} \rightarrow A \subset B$

8. $A = \{x \in N \mid x \geq 4\}$, $B = \{x \in N \mid x \geq 1\}$

จาก $\forall x \in A \rightarrow x \in B$



$\therefore A \subset B$

9. $A = \{x \mid x^2 = 4\}$, $B = \{x \mid 0 < x < 5\}$

$A = \{2, -2\}$

จาก $2 \in B$ แต่ $-2 \notin B$

$\therefore A \not\subset B$

เพาเวอร์เซต

เพาเวอร์เซตของเซต A แทนด้วยสัญลักษณ์ $P(A)$ หมายถึงเซตของสับเซตทั้งหมดของ A

ภาษาง่าย ๆ : หาสับเซตของ A ทั้งหมด แล้วเอามาใส่เซตครอบอีกชั้น

โดย $n(P(A)) = 2^{n(A)}$ มาจากหลักการนับพื้นฐาน

เช่น $A = \{a,\ b\}$ จะได้ สับเซตของ A คือ $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a,\ b\}$ ทั้งหมด 4 สับเซต

ดังนั้น $P(A)$ คือ $\{\ \emptyset\ ,\ \{a\}\ ,\ \{b\}\ ,\ \{a,\ b\}\ \}$

ถ้าเลขสับซ้อนแล้วนึกไม่ออก ลองแทน a,b แล้วแทนกลับ

จงหา $P(A)$ และ $n(P(A))$ ต่อไปนี้

1. $A = \{1, 2\}$

$n(P(A)) = 2^{n(A)} = 2^2 = 4$

$P(A) = \{\ \emptyset\ ,\ \{1\}\ ,\ \{2\}\ ,\ \{1,2\}\ \}$

2. $A = \{\emptyset,\ \{\emptyset\}\}$

$n(P(A)) = 2^{n(A)} = 2^2 = 4$

มอง $a = \emptyset$, $b = \{\emptyset\}$

$P(A) = \{\ \emptyset\ ,\ \{a\}\ ,\ \{b\}\ ,\ \{a,b\}\ \}$

$= \{\ \emptyset\ ,\ \{\emptyset\}\ ,\ \{\{\emptyset\}\}\ ,\ \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\ \}$

3. $A = \{ \emptyset, \{1, \{2\}\} \}$

$n(P(A)) = 2^{n(A)} = 2^2 = 4$

ให้ $a = \phi$, $b = \{1, \{2\}\}$

$P(A) = \{ \phi , \{a\}, \{b\}, \{a, b\} \}$

$= \{ \phi , \{\phi\}, \{\{1, \{2\}\}\}, \{\phi, \{1, \{2\}\}\} \}$

4. $A = \{ \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{1\}\} \}$

$n(P(A)) = 2^{n(A)} = 2^1 = 2$

ให้ $a = \{\phi, \{\phi\}, \{1\}\}$

$P(A) = \{ \phi , \{a\}\}$

$= \{ \phi , \{\{\phi, \{\phi\}, \{1\}\}\}\}$

5. $A = \{\{1\}, \{2\}\}$

$n(P(A)) = 2^{n(A)} = 2^2 = 4$

ให้ $a = \{1\}$, $b = \{2\}$

$P(A) = \{ \phi , \{a\}, \{b\}, \{a, b\} \}$

$= \{ \phi , \{\{1\}\}, \{\{2\}\}, \{\{1\}, \{2\}\} \}$

6. $A = \{1, 2, 3\}$

$n(P(A)) = 2^{n(A)} = 2^3 = 8$

$P(A) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

7. $A = P(\{1\})$

$A = \{\phi, \{\{1\}\}\}$

$n(P(A)) = 2^{n(A)} = 2^2 = 4$

$P(A) = \{\phi, \{\phi\}, \{\{\{1\}\}\}, \{\phi, \{\{1\}\}\}\}$

โจทย์อีกแนวในเรื่องนี้ จะเป็นการตรวจสอบ $x \in P(A)$ กับ $X \subset P(A)$

การพิจารณา $x \in P(A)$

จากนิยามของ $P(A)$ คือเซตที่เก็บสับเซตของ A, การที่จะเป็นสมาชิกใน $P(A)$ คือ $x \subset A$

เช่น ตรวจสอบ $\{3, 5\} \in P(\{2, 3, 5, 7\})$ หรือไม่

จากการเข้าใจนิยามข้างต้น $x \in P(A) \leftrightarrow x \subset A$

ดังนั้นจะพิจารณาว่า $\{3, 5\} \subset \{2, 3, 5, 7\}$ ซึ่งเห็นได้ว่าเป็นจริง

ดังนั้น $\{3, 5\} \in P(\{2, 3, 5, 7\})$

จงตรวจสอบว่า $x \in P(A)$ หรือไม่

1. $x = \{2, 3, 5\}, A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$x \in P(A) \leftrightarrow x \subset A$

$\forall k \in x \rightarrow k \in A$

จาก $2 \in A \wedge 3 \in A \wedge 5 \in A$

$\therefore x \subset A \rightarrow x \in P(A)$

2. $x = \{\emptyset, 2\}, A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$x \in P(A) \leftrightarrow x \subset A$

$\forall k \in x \rightarrow k \in A$

จาก $\emptyset \notin A$

$\therefore x \notin P(A)$

3. $x = 1,\ A = \{1,\ 2,\ 3\}$

จาก x ไม่เป็นเซต แต่ ผลลัพธ์จาก $P(A)$ ทุกสมาชิกเป็นเซต

$\therefore \quad x \notin P(A)$

4. $x = \{1\},\ A = \{\{1\},\ \{2\},\ \{3\}\}$

$x \in P(A) \leftrightarrow x \subset A$

$\forall k \in x \rightarrow k \in A$

จาก $1 \notin A$

$\therefore \quad x \notin P(A)$

5. $x = \{0, 1\},\ A = \mathbb{Z}^{+}$

$x \in P(A) \leftrightarrow x \subset A$

$\forall k \in x \rightarrow k \in A$

จาก $0 \notin A$

$\therefore \quad x \not\subset A \rightarrow x \notin P(A)$

6. $x = \{\emptyset\},\ A = \emptyset$

$x \in P(A) \leftrightarrow x \subset A$

$\forall k \in x \rightarrow k \in A$

จาก $\emptyset \notin A$

$\therefore\ x \not\subset A \rightarrow x \notin P(A)$

7. $x = \{\{a,\ b\}\},\ A = \{a,\ b,\ \{a\},\ \{b\}\}$

$x \in P(A) \leftrightarrow x \subset A$

$\forall k \in x \rightarrow k \in A$

จาก $\{a, b\} \notin A$

$\therefore\ x \not\subset A \rightarrow x \notin P(A)$

8. $x = \{1,\ \{2\}\},\ A = \{1,\ 2,\ \{1\},\ \{\{2\}\}\}$

$x \in P(A) \leftrightarrow x \subset A$

$\forall k \in x \rightarrow k \in A$

จาก $1 \in A \wedge \{2\} \notin A$

$\therefore\ x \subset A \rightarrow x \notin P(A)$

การพิจารณา $X \subset P(A)$

จากนิยามของ $P(A)$ คือเซตที่เก็บสับเซตของ A

$X \subset P(A)$ คือ $\forall x \in X \rightarrow x \in P(A)$ และ การที่ $x \in P(A)$ คือ $x \subset A$

นั่นคือ $X \subset P(A)$ คือ $\forall x \in X \rightarrow x \subset A$

ภาษาง่าย ๆ: ถอดวงเล็บนอกของ X แล้วเช็คทีละตัวว่าเป็นสับเซตของ A หรือไม่

ตัวอย่าง พิจารณา $\{\emptyset\ ,\ 1,\ \{2\}\} \subset P(\{1,2,3\})$ หรือไม่

จาก $[X \subset P(A)] \leftrightarrow [\ \forall x \in X \rightarrow x \subset A\ ]$

จะพิจารณาว่า $\emptyset\ ,\ 1,\ \{2\}$ แต่ละสมาชิก $\subset \{1,2,3\}$ หรือไม่

จาก $1 \not\subset \{1,2,3\}$ ดังนั้น $\{\emptyset\ ,\ 1,\ \{2\}\} \subset P(\{1,2,3\})$

หรือสามารถสังเกตว่าอะไรที่เป็นสับเซตในพาวเวอร์เซตได้ จะต้องเป็นเซต ของเซตแต่ 1 ไม่เป็นเซตของอะไรสักอย่าง

จงตรวจสอบว่า $X \subset P(A)$ หรือไม่

1. $X = \{1\},\ A = \{1,2,3\}$

$[X \subset P(A)] \leftrightarrow [\forall x \in X \rightarrow x \subset A]$

จาก $1 \not\subset A$

$\therefore\ X \not\subset P(A)$

2. $X = \{\emptyset, 1, \{2\}\}$, $A = \{1, 2, 3\}$

$[X \subset P(A)] \leftrightarrow [\forall x \in X \rightarrow x \subset A]$

จาก $1 \not\subset A$

$\therefore X \not\subset P(A)$

3. $X = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{2\}\}$, $A = \{1, 2, 3\}$

$[X \subset P(A)] \leftrightarrow [\forall x \in X \rightarrow x \subset A]$

จาก $\emptyset \subset A \wedge \{1,2\} \subset A \wedge \{2\} \subset A$

$\therefore [\forall x \in X \rightarrow x \subset A] \rightarrow [X \subset P(A)]$

4. $X = \{\emptyset, \{1, \{2\}\}, \{2\}, \{1\}\}$, $A = \{2, \{1\}, \{2\}\}$

$[X \subset P(A)] \leftrightarrow [\forall x \in X \rightarrow x \subset A]$

จาก $\{1\} \not\subset A$

$\therefore X \not\subset P(A)$

5. $X = \{\emptyset, \{\{1\},\{2\}\}, \{1\}\}$, $A = \{\{1\}, \{2\}\}$

$[X \subset P(A)] \leftrightarrow [\forall x \in X \rightarrow x \subset A]$

จาก $\{1\} \not\subset A$

$\therefore \; X \notin P(A)$

6. $X = \{\{1,2,3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, 1, 2\}$, $A = \{1,2,3\}$

$[X \subset P(A)] \leftrightarrow [\forall x \in X \rightarrow x \subset A]$

จาก $1 \in X \rightarrow 1 \not\subset A$

$\therefore \; X \notin P(A)$

7. $X = A - B$ เมื่อ B เป็นเซตใด ๆ

เช่น $A = \{1\}$ $B = \emptyset$

$X = \{1\}$ $P(A) = \{\{1\}\}$

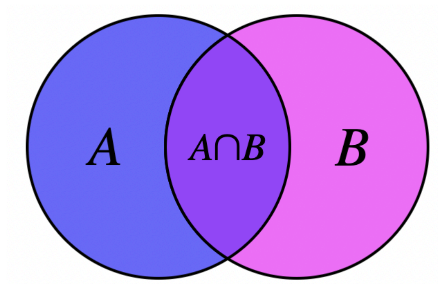
$1 \in X \rightarrow 1 \notin P(A)$

$\therefore \; X \notin P(A)$

การดำเนินการของเซต

อินเตอร์เซก (Intersect)

A อินเตอร์เซก B แทนด้วยสัญลักษณ์ $A \cap B$ หมายถึง การหาส่วนที่ซ้ำกันของเซต A และ B โดยสามารถแสดงเป็นแผนภาพเวนน์-ออยเลอร์ได้ดังนี้



เช่น $\{1, 2, 3\} \cap \{3, 4, 5\} = \{3\}$

$\{1, 2, 3\} \cap R = \{1, 2, 3\}$

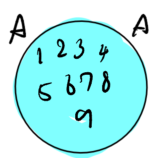
$\{\} \cap \{1, 3, 5\} = \{\}$ **$\emptyset \cap A = \emptyset$ เสมอ จากการที่ไม่มีอะไรซ้ำกับ $\emptyset$**

ให้ $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 < x < 10\}$, $A = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$

$B = \{x \mid 0 < x < 10 \wedge x = 2k + 1, \exists k \in \mathbb{Z}\}$, $C = \{x \mid$ เมื่อ x เป็นจำนวนเฉพาะบวก และ $0 < x < 10\}$ $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ $C = \{2, 3, 5, 7\}$

จงวาดแผนภาพเวนน์-ออยเลอร์เพื่อหาการอินเตอร์เซกและจำนวนสมาชิกต่อไปนี้

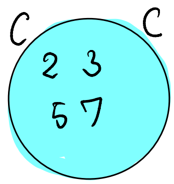
1. $A \cap A$



$A \cap A = A = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$

$n(A \cap A) = n(A) = 9$

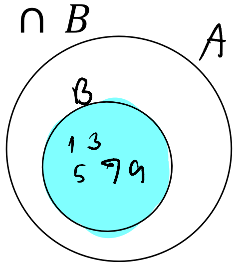
2. $C \cap C$



$C \cap C = C = \{2, 3, 5, 7\}$

$n(C \cap C) = n(C) = 4$

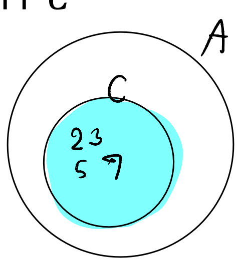
3. $A \cap B$



$A \cap B = B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$n(A \cap B) = n(B) = 5$

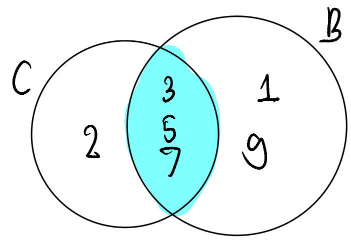
4. $A \cap C$



$A \cap C = \{2, 3, 5, 7\}$

$n(A \cap C) = 4$

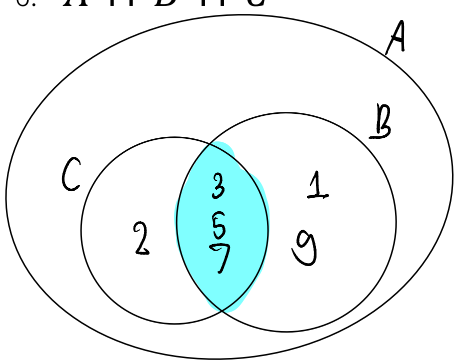
5. $B \cap C$



$B \cap C = \{3, 5, 7\}$

$n(B \cap C) = 3$

6. $A \cap B \cap C$



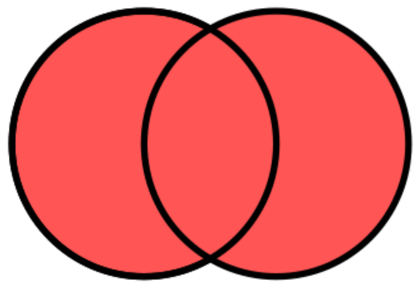
$A \cap B \cap C = \{3, 5, 7\}$

$n(A \cap B \cap C) = 3$

ยูเนียน (Union)

A ยูเนียน B แทนด้วยสัญลักษณ์ $A \cup B$ หมายถึง การนำเซต A และ B มารวมกัน แต่จากนิยามของเซตตัวที่ซ้ำกันจะมีได้แค่ตัวเดียว

โดยสามารถแสดงเป็นแผนภาพเวนน์-ออยเลอร์ได้ดังนี้



เช่น $\{1, 2\} \cup \{3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$

$\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$

$\{1, 3, 5\} \cup \{1, 3\} = \{1, 3, 5\}$

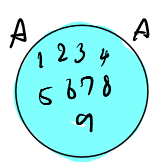
$\{1, 2\} \cup \{\} = \{1, 2\}$ **$\emptyset \cap A = A$ เสมอ จากไม่มีอะไรใน $\emptyset$ ให้เพิ่ม**

ให้ $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 < x < 10\}$, $A = \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$

$B = \{x \mid 0 < x < 10 \land x = 2k, \exists k \in \mathbb{Z}\}$, $C = \{x \mid$ เมื่อ x เป็นจำนวนเฉพาะบวก และ $0 < x < 10\}$ $B = \{2, 4, 6, 8\}$ $C = \{2, 3, 5, 7\}$

จงวาดแผนภาพเวนน์-ออยเลอร์เพื่อหาการยูเนียนและจำนวนสมาชิกต่อไปนี้

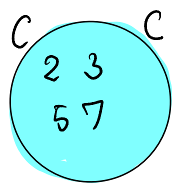
1. $A \cup A$



$A \cup A = A = \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$

$n(A \cup A) = n(A) = 9$

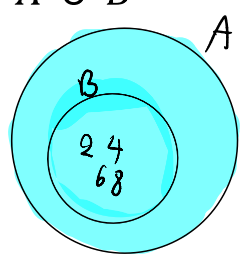
2. $C \cup C$



$C \cup C = C = \{2, 3, 5, 7\}$

$n(C \cup C) = n(C) = 4$

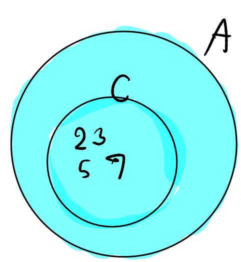
3. $A \cup B$



$A \cup B = A = \{1, 2, 3, \ldots 9\}$

$n(A \cup B) = n(A) = 9$

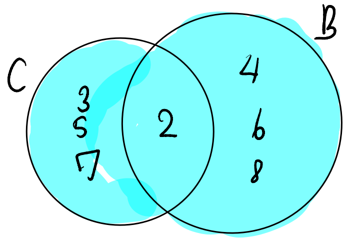
4. $A \cup C$



$A \cup C = A = \{1, 2, 3, \ldots 9\}$

$n(A \cup C) = n(A) = 9$

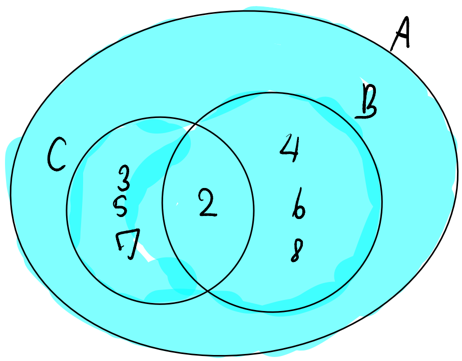
5. $B \cup C$



$B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$n(B \cup C) = 7$

6. $A \cup B \cup C$



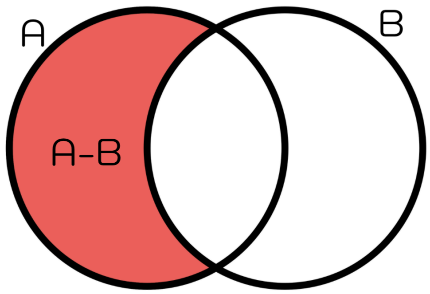
$A \cup B \cup C = A = \{1, 2, 3, \dots 9\}$

$n(A \cup B \cup C) = n(A) = 9$

ผลต่าง หรือ ลบ (Difference) หรือคือการกรองทิ้ง

A ลบ B แทนด้วยสัญลักษณ์ $A - B$ หมายถึง เซต A ที่ไม่มีสมาชิกที่อยู่ใน B

โดยสามารถแสดงเป็นแผนภาพเวนน์-ออยเลอร์ได้ดังนี้



เช่น $\{1,\ 2,\ 3\} - \{3, 4, 5\} = \{1, 2\}$

$\{1,\ 2\} - \{1,\ 2,\ 3,\ 4\} = \{\}$

$\{1,\ 3,\ 5\} - \{\} = \{1,\ 3,\ 5\}$

ให้ $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 < x < 8\}$,

$B = \{x \mid 0 < x < 11 \ \wedge x = 2k,\ \exists k \in \mathbb{Z}\}$, $C = \{x \mid$ เมื่อ x เป็นจำนวนเฉพาะบวก และ $0 < x < 12\}$

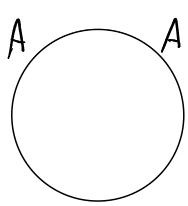
$A = \{1, 2, 3, \ldots, 7\}$

$B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

$C = \{2, 3, 5, 7, 11\}$

จงวาดแผนภาพเวนน์-ออยเลอร์เพื่อหาเซตและจำนวนสมาชิกต่อไปนี้

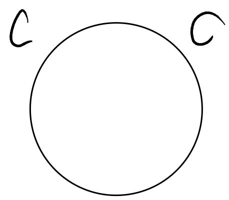
1. $A - A$



$A - A = \phi$

$n(A - A) = 0$

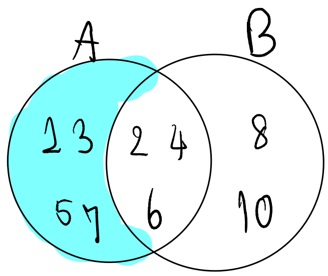
2. $C - C$



$C - C = \phi$

$n(C - C) = 0$

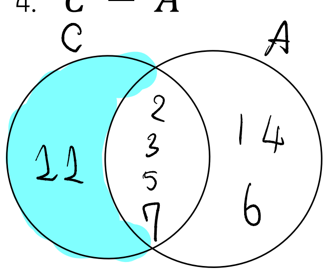
3. $A - B$



$A - B = \{1, 3, 5, 7\}$

$n(A - B) = 4$

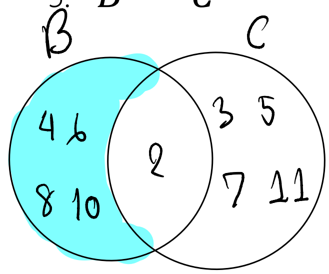
4. $C - A$



$C - A = \{11\}$

$n(C - A) = 1$

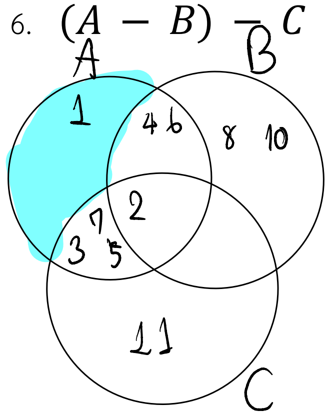
5. $B - C$



$B - C = \{4, 6, 8, 10\}$

$n(B - C) = 4$

6. $(A - B) - C$



$(A - B) - C = \{1\}$

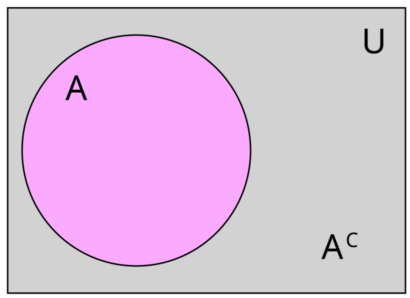
$n[(A - B) - C] = 1$

คอมพลีเมนต์ (Complements)

A คอมพลีเมนต์ แทนด้วยสัญลักษณ์ A' หรือ A^c หมายถึงบริเวณที่ไม่ใช่ A

โดยปกติจะกำหนดขอบเขตที่สนใจหรือเอกภพสัมพัทธ์ Uโดยมีข้อตกลงว่าสมาชิกที่เกี่ยวข้องทั้งหมดจะอยู่ในเซตนี้เท่านั้น

โดยสามารถแสดงเป็นแผนภาพเวนน์-ออยเลอร์ได้ดังนี้



เช่น ให้ $U = \{1, 2, 3,.., 10\}$

$A = \{1, 2, 3\} \rightarrow A' = \{4, 5, 6,..., 10\}$

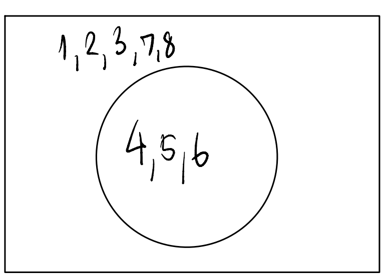
$A = U \rightarrow A = \{\}$

$A = \{\} \rightarrow A' = U$

$U = \{1, 2, 3, \ldots, 8\}$

กำหนดให้ $U = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 < x < 9\}$ จงวาดแผนภาพเวนน์-ออยเลอร์เพื่อหาผลลัพธ์และขนาดต่อไปนี้

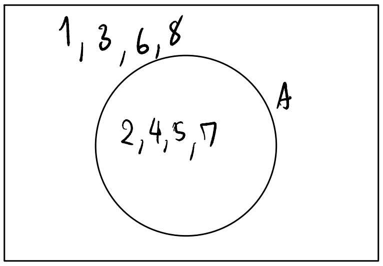
1. A^c เมื่อ $A = \{4, 5, 6\}$



$A' = \{1, 2, 3, 7, 8\}$

$n(A') = 5$

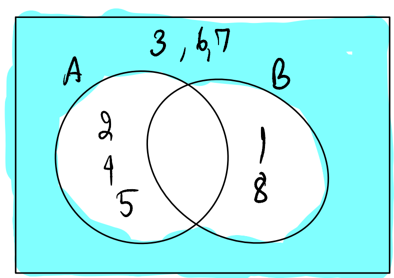
2. A^c เมื่อ $A = \{2, 4, 5, 7\}$



$A' = U - A = \{1, 3, 6, 8\}$

$n(A') = n(U) - n(A) = 4$

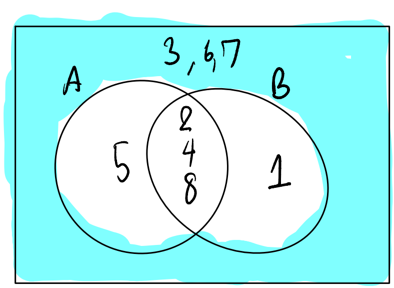
3. $(A \cup B)^c$ เมื่อ $A = \{2, 4, 5\}$ และ $B = \{1, 8\}$



$(A \cup B)^c = U - (A \cup B) = \{3, 6, 7\}$

$n((A \cup B)^c) = 3$

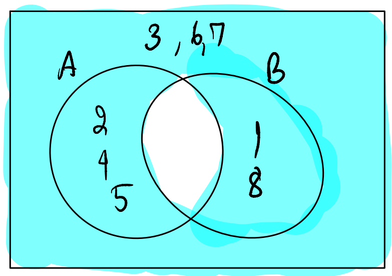
4. $(A \cup B)^c$ เมื่อ $A = \{2, 4, 5, 8\}$ และ $B = \{1, 2, 4, 8\}$



$(A \cup B)^c = U - (A \cup B) = \{3, 6, 7\}$

$n((A \cup B)^c) = 3$

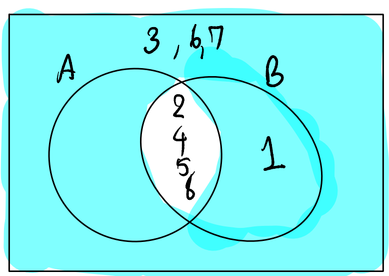
5. $(A \cap B)^c$ เมื่อ $A = \{2, 4, 5\}$ และ $B = \{1, 8\}$



$(A \cap B)^c = \mathcal{U} - \cancel{(A \cap B)}^{\phi} = \mathcal{U}$

$n((A \cap B)^c) = n(\mathcal{U}) = 8$

6. $(A \cap B)^c$ เมื่อ $A = \{2, 4, 5, 8\}$ และ $B = \{1, 2, 4, 5, 8\}$



$(A \cap B)^c = \mathcal{U} - (A \cap B) = \{1, 3, 6, 7\}$

$n[(A \cap B)^c] = 4$

7. $(A^c)^c$ เมื่อ $A = \{1, 2, 3, 4\}$

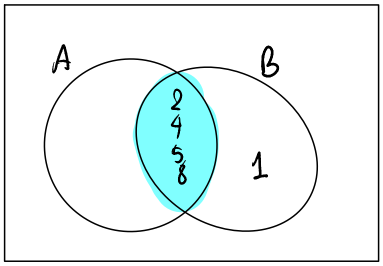
$= (\mathcal{U} - A)^c$

$= \mathcal{U} - (\mathcal{U} - A)$

$= A = \{1, 2, 3, 4\}$

$n((A^c)^c) = n(A) = 4$

8. $A - B^{C}$ เมื่อ $A = \{2, 4, 5, 8\}$ และ $B = \{1, 2, 4, 5, 8\}$

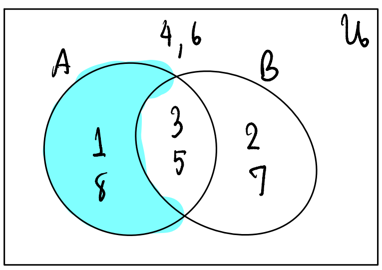


พิจารณา Area $A-B^{C} = A\cap B$

$= \{2,4,5,8\}$

$n(A-B^{c}) = n(A\cap B) = 4$

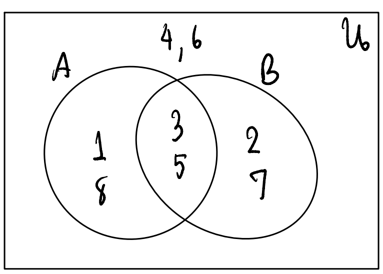
9. $A \cap B^{C}$ เมื่อ $A = \{1, 3, 5, 8\}$ และ $B = \{2, 3, 5, 7\}$



พิจารณา $A\cap B^{C} = A-B = \{1,8\}$

$n(A\cap B^{c}) = 2$

10. $A^{C} \cup B^{C}$ เมื่อ $A = \{1, 3, 5, 8\}$ และ $B = \{2, 3, 5, 7\}$



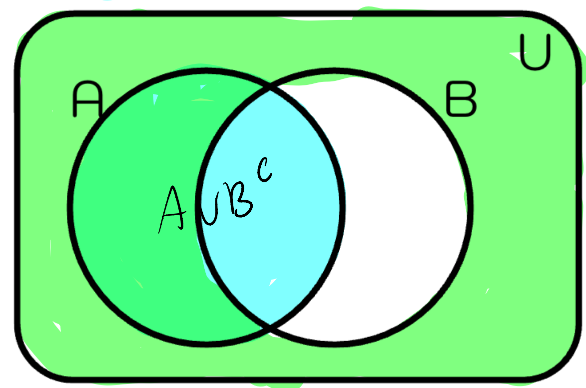
พิจารณา $A^{C}\cup B^{C} = U-(A\cap B)$

$= \{1,2,4,6,7,8\}$

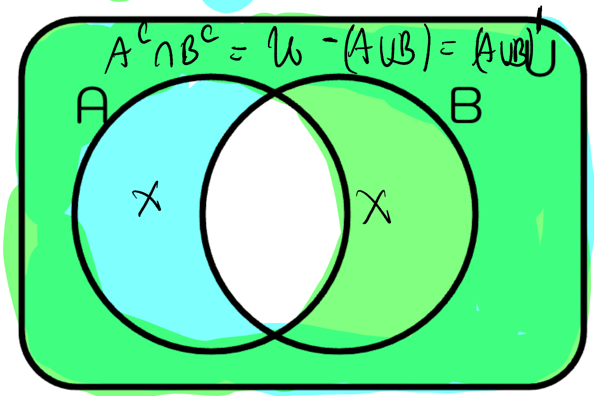
$n(A^{c}\cup B^{c}) = 6$

จงระบายเซตที่สนใจในแผนภาพต่อไปนี้

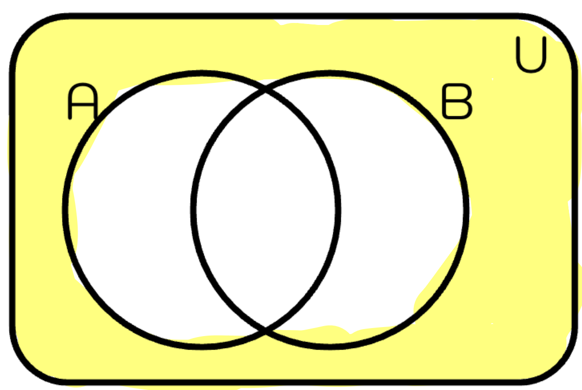
1. $A \cup B^c$



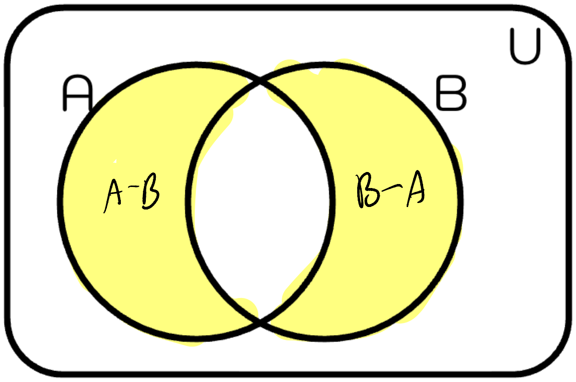
2. $A^c \cap B^c$



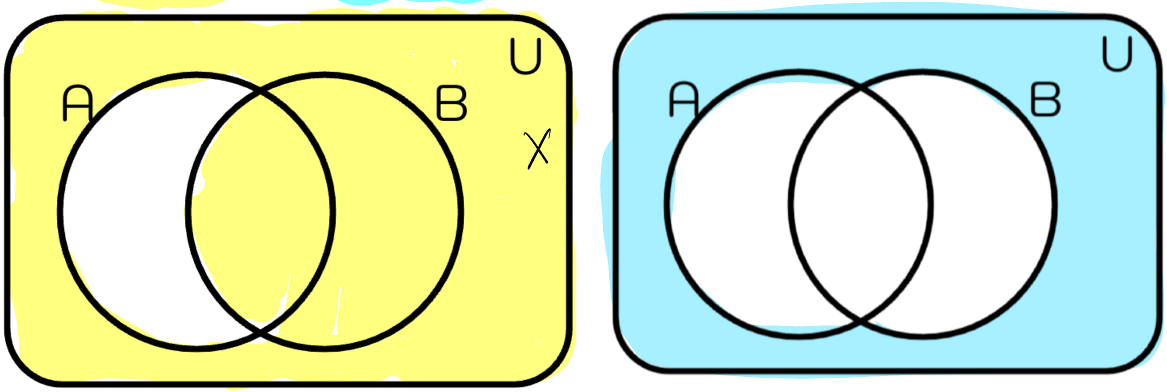
3. $(A \cup B)^c$ = $A' \cap B'$



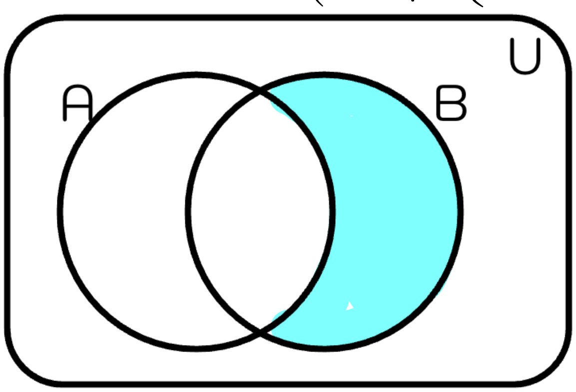
4. $(A - B) \cup (B - A)$



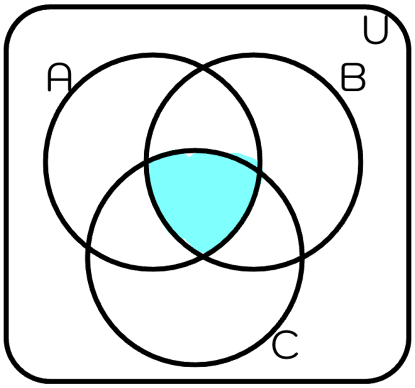
5. $(A - B)^c - (B^c - A)$ $= B$



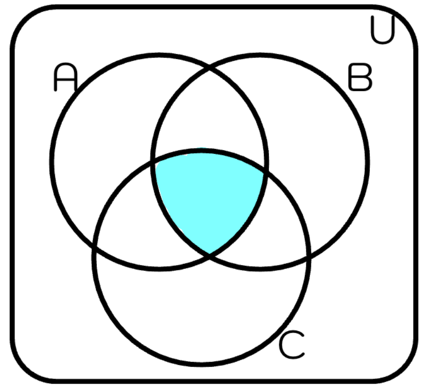
6. $A^c - B^c$ $(U-A)-(U-B) = B-A$



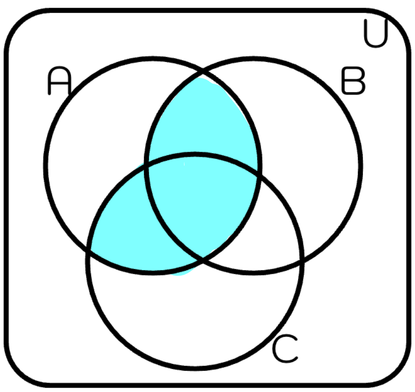
7. $(A \cap B) \cap C$



8. $A \cap (B \cap C)$

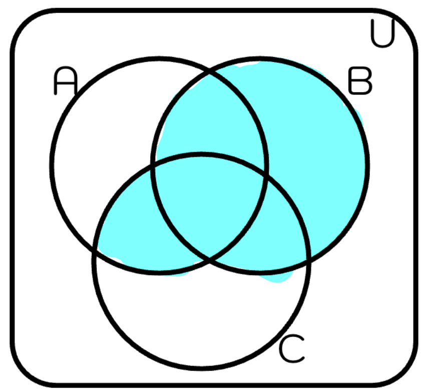


9. $A \cap (C \cup B)$

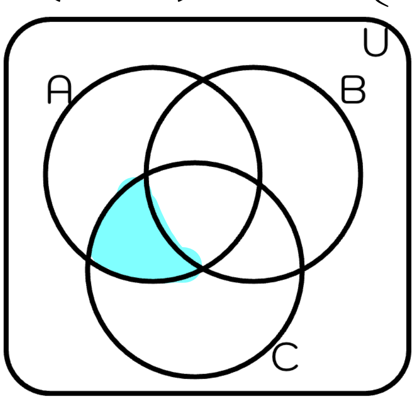


$= B \cup (A \cap C)$

10. $(A \cup B) \cap (C \cup B)$

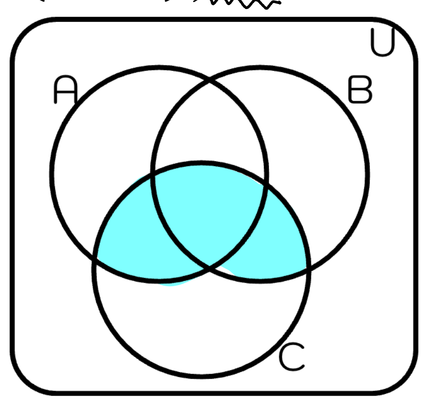


11. $(A \cap C) \cap B^c = (A \cap C) - B$

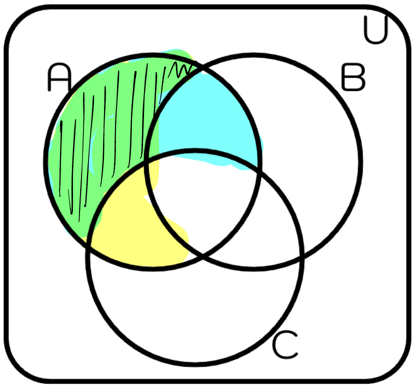


เอาแค่ส่วนใน C

12. $(A \cup B) - C^c$

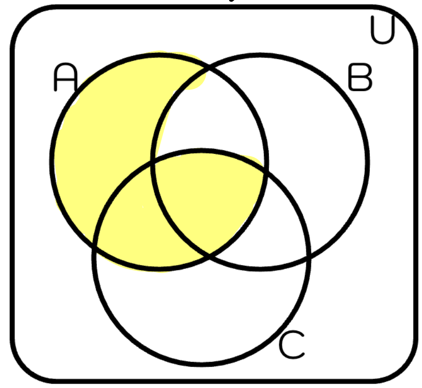


13. $(A - B) \cap (A - C)$

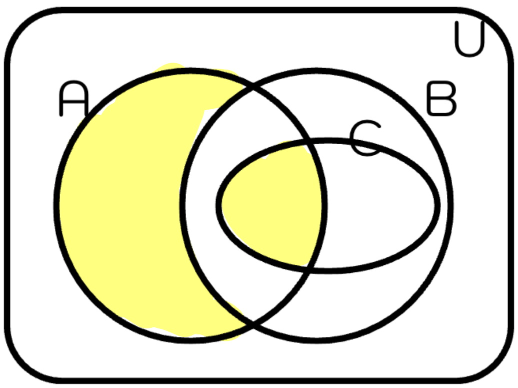


นอก B + C   เอาแค่ใน A

14. $\underline{(B^c \cup C)} - A^c$

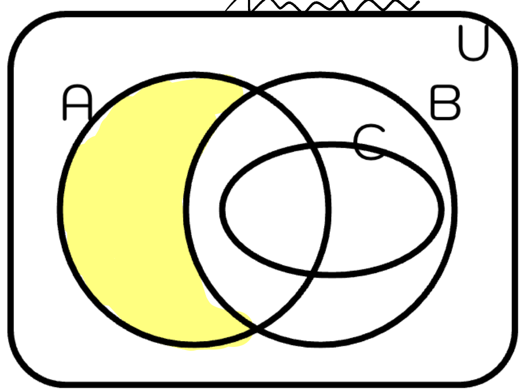


15. $A - (B - C)$



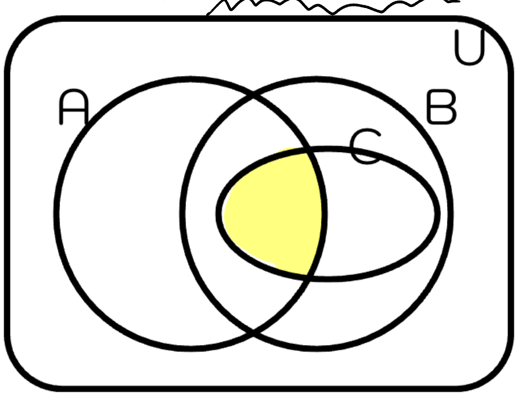
เอาแค่ส่วน (A − C)

16. $(B - C)^c - (A - C)^c$

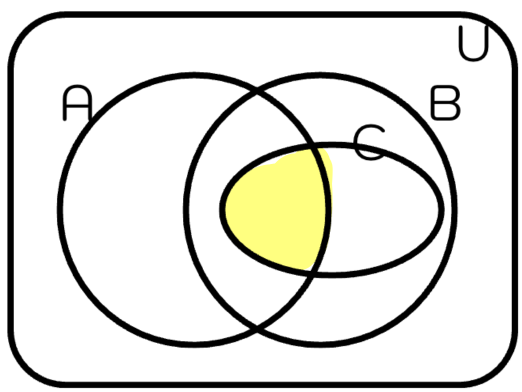


เอาแค่ส่วน A∩B∩C

17. $(B \cap C) - (A \cap B \cap C)^c$



18. $(B - A)^c \cap (C^c)^c$



หลักการเพิ่มเข้าตัดออกในเซต 2 เซต

จากการที่เซตจะไม่มีสมาชิกซ้ำ ทำให้เมื่อเวลาหา $n(A \cup B)$ อาจจะไม่เท่ากับ $n(A) + n(B)$ เสมอ เนื่องจากจะมีส่วนที่หายไปเนื่องจากซ้ำกันคือ $n(A \cap B)$

ดังนั้นจะหา $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

ตัวอย่างการใช้งาน

มีสมาชิกอยู่ในเซต A 50 ตัว มีสมาชิกอยู่ในเซต A 40 ตัว มีสมาชิกที่อยู่ทั้ง A และ B 30 ตัว จะมีสมาชิกอยู่ใน A หรือ B กี่ตัว

ทำโจทย์ปัญหา → แปลโจทย์เป็นค่าตัวเลข $n(A) = 50$, $n(B) = 40$

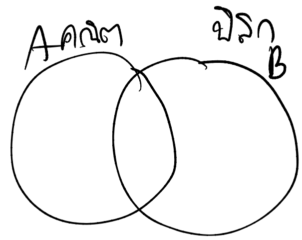
, $n(A \cap B) = 30$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 50 + 40 - 30 = 60$$

จงแก้โจทย์ปัญหาโดยใช้แนวทางเพิ่มเข้าตัดออก

$n(A)=30$ $n(B)=25$ $n(A \cap B)=20$

1. ในห้องเรียนหนึ่งมีนักเรียนชอบคณิต 30 คน ชอบฟิสิกส์ 25 คน มีนักเรียนชอบทั้งคณิตและฟิสิกส์ 20 คน จะมีนักเรียนชอบคณิตหรือฟิสิกส์กี่คน

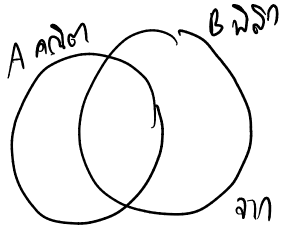


$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$= 30 + 25 - 20$

$n(A \cup B) = 35$

2. ในห้องเรียนหนึ่งมีนักเรียนชอบคณิต 40 คน ชอบฟิสิกส์ 35 คน มีนักเรียนชอบทั้งคณิตและฟิสิกส์ 25 คน จะมีนักเรียนชอบอย่างใดอย่างหนึ่งกี่คน



แปลโจทย์ ถาม $n(A \cup B) - n(A \cap B)$

ให้ $n(A) = 40$ $\quad n(B) = 35$ $\quad n(A \cap B) = 25$

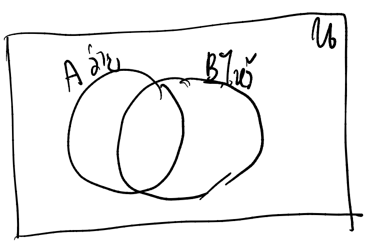
จาก $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$= 40 + 35 - 25$

$n(A \cup B) = 50$

$n(A \cup B) - n(A \cap B) = 50 - 25 = 25$ คน

3. จากการสำรวจตัวอย่างว่าชอบว่ายน้ำ/ไหว้พระ/ทั้งคู่/ไม่ทั้งคู่ 200 คน มีคนชอบว่ายน้ำ 100 คน ไม่ชอบทั้งคู่ 10 คน ชอบทั้งคู่ 40 คน จงหาว่ามีคนชอบไหว้พระกี่คน



แปลโจทย์ $n(U) = 200$

$n(A) = 100$

$n((A \cup B)') = 10$

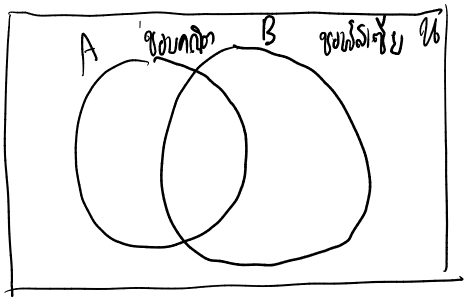
$n(A \cap B) = 40$ $\quad$ หา $n(B) = ?$

จาก $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = U - n((A \cup B)')$

$100 + n(B) - 40 = 200 - 10$

$n(B) = 130$ คน

4. ในการสอบถามนักเรียนห้องหนึ่ง 99 คน พบว่า ไม่ชอบคณิตศาสตร์ 59 คน ไม่ชอบภาษารัสเซีย 63 คน ชอบทั้งสองวิชา 30 คน จงหาว่ามีนักเรียนกี่คนที่ชอบคณิตศาสตร์ แต่ไม่ชอบภาษารัสเซีย



แปลโจทย์

$n(U) = 99$

$n(A') = 59 \rightarrow n(A) = n(U) - n(A') = 40$

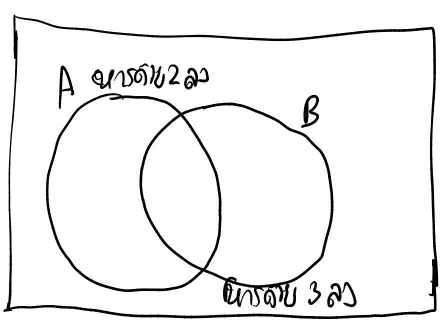
$n(B') = 63 \rightarrow n(B) = n(U) - n(B') = 36$

$n(A \cap B) = 30$

หา $n(A - B) = ?$

$$n(A-B) = n(A) - n(A \cap B) = 40 - 30 = 10$$

5. จงหาจำนวนของจำนวนเต็มระหว่าง 1 และ 1001 ที่หารด้วย 2 หรือ 3 ลงตัว



$A = \{2, 4, \dots, 1000\}$

$n(A) = 500$

$B = \{3, 6, \dots, 999\}$

$n(B) = 333$

$A \cap B = \{6, 12, 18, \dots, 996\}$

$n(A \cap B) = 166$

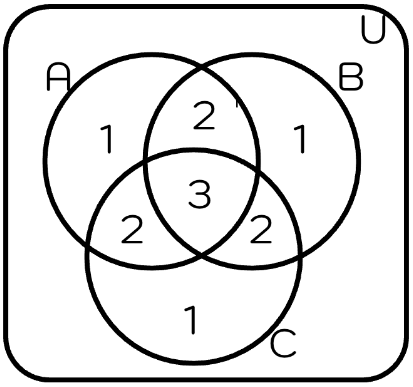
หา $n(A \cup B) = ?$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

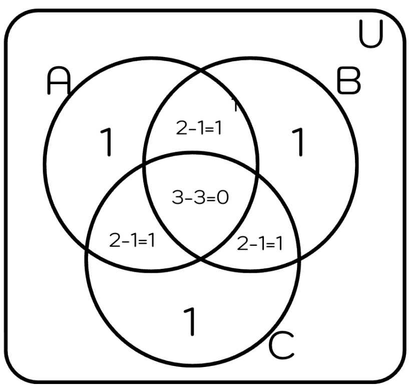
$$= 500 + 333 - 166 = 667$$

หลักการเพิ่มเข้าตัดออกในเซต 3 เซต

จากแผนภาพแสดงจำนวนครั้งที่นับในพื้นที่ต่าง ๆ เมื่อคิด $n(A) + n(B) + n(C)$ หากต้องการหา $n(A \cup B \cup C)$ จะต้องนับทุกพื้นที่อย่างละครั้ง



โดยจะลบส่วนที่ทับซ้อนกันของ 2 เซตใด ๆ อย่างละครั้ง เช่น $A \cap B$ แล้วพิจารณาความถี่การนับใหม่อีกครั้ง จะได้ดังรูป



จะเห็นว่าพื้นที่ $n(A \cap B \cap C)$ ไม่ถูกนับเลย จึงเพิ่มไป 1 ครั้ง จะได้ว่า

$$n(A \cup B \cup C) = \sum_{a,b,c} n(A) - \sum_{a,b,c} n(A \cap B) + n(A \cap B \cap C)$$

ตัวอย่างในการทำโจทย์

จงหาจำนวนของจำนวนเต็มช่วง 1 ถึง 30 ที่หารด้วย 2 หรือ 3 หรือ 5 ลงตัว

ให้ A_2 แทน เซตของจำนวนเต็มที่หารด้วย 2 ลงตัว $n(A_2) = 15$

A_3 แทน เซตของจำนวนเต็มที่หารด้วย 3 ลงตัว $n(A_2) = 10$

A_5 แทน เซตของจำนวนเต็มที่หารด้วย 5 ลงตัว $n(A_2) = 6$

$A_{2,3}$ แทน เซตของจำนวนเต็มที่หารด้วย $2, 3$ ลงตัว $n(A_2) = 5$

$A_{2,5}$ แทน เซตของจำนวนเต็มที่หารด้วย $2, 5$ ลงตัว $n(A_2) = 3$

$A_{3,5}$ แทน เซตของจำนวนเต็มที่หารด้วย $3, 5$ ลงตัว $n(A_2) = 2$

$A_{2,3,5}$ แทน เซตของจำนวนเต็มที่หารด้วย $2, 3, 5$ ลงตัว $n(A_2) = 1$

$$n(A_2 \cup A_3 \cup A_5) = \sum_{2,3,5} A_i - \sum_{2,3,5} A_{i,j} + n(A_2 \cap A_3 \cap A_5)$$

$$n(A_2 \cup A_3 \cup A_5) = 15 + 10 + 6 - 5 - 3 - 2 + 1 = 22$$

จงลองใช้แนวทางเพิ่มเข้าตัดออกใน 3 เซตแก้โจทย์ปัญหา

1. จงหาจำนวนของจำนวนเต็มช่วง 1 ถึง 100 ที่หารด้วย 3 หรือ 5 หรือ 11 ลงตัว

ให้ $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 100 \wedge 3 \mid x\}$

$B = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 100 \wedge 5 \mid x\}$

$C = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 100 \wedge 11 \mid x\}$

หา $n(A \cup B \cup C) = ?$

$$
\begin{aligned}
n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) \\
&= \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{11} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{3 \cdot 5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{3 \cdot 11} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{5 \cdot 11} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{3 \cdot 5 \cdot 11} \right\rfloor \\
&= 33 + 20 + 9 - 6 - 3 - 1 + 0 \\
&= 52
\end{aligned}
$$

2. ในการสอบของนักเรียนชั้นประถมศึกษากลุ่มหนึ่ง พบว่า มีผู้สอบผ่านวิชาต่างๆ ดังนี้

คณิตศาสตร์ 36 คน $n(A) = 36$

สังคมศึกษา 50 คน $n(B) = 50$

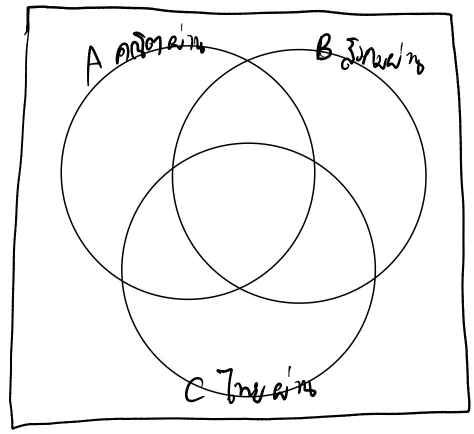
ภาษาไทย 44 คน $n(C) = 44$

คณิตศาสตร์และสังคมศึกษา 15 คน $n(A \cap B) = 15$

ภาษาไทยและสังคมศึกษา 12 คน $n(B \cap C) = 12$

คณิตศาสตร์และภาษาไทย 7 คน $n(A \cap C) = 7$

ทั้งสามวิชา 5 คน $n(A \cap B \cap C) = 5$



จงหาจำนวนผู้สอบผ่านอย่างน้อยหนึ่งวิชา $n(A \cup B \cup C) = ?$

$$n(A \cup B \cup C) = \sum_{A,B,C} n(i) - \sum_{A,B,C} n(i \cap j) + n(A \cap B \cap C)$$

$$= 36 + 50 + 44 - 15 - 12 - 7 + 5$$

$$= 101$$

3. จากการสอบถามความชอบรับประทานไอศกรีมของนักเรียนจำนวน 180 คน พบว่า

มี 86 คน ชอบรสช็อกโกแลต

มี 31 คน ชอบรสช็อกโกแลตและวานิลลา

มี 87 คน ชอบรสวานิลลา

มี 27 คน ชอบรสวานิลลาและสตรอเบอรี่

มี 70 คน ชอบรสสตรอเบอรี่

มี 22 คน ชอบรสช็อกโกแลตและสตรอเบอรี่

และ มี 5 คน ไม่ชอบทั้งสามรส

จงหาจำนวนนักเรียนที่ชอบทั้งสามรสกี่คน $\rightarrow n(A \cap B \cap C)$

$$\mathcal{U} - n((A \cup B \cup C)') = \sum_{A,B,C} n(i) - \sum_{A,B,C} n(i \cap j) + n(A \cap B \cap C)$$

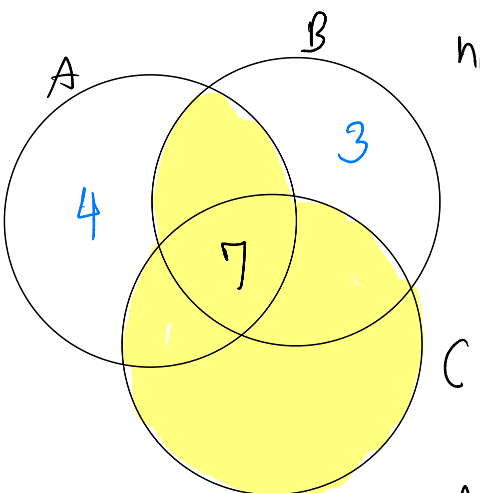
$$180 - 5 = (86 + 87 + 70) - (31 + 27 + 22) + n(A \cap B \cap C)$$

$$n(A \cap B \cap C) = 12 \text{ คน}$$

4. ให้จำนวนสมาชิกของเซตต่างๆ ตามตารางต่อไปนี้

เซต	จำนวนสมาชิก
$A \cup B$	25
$A \cup C$	27
$B \cup C$	26
$A \cup B \cup C$	30
$A \cap B \cap C$	7

จงหา $(A \cap B) \cup C$



$n((A-B)-C) = n((A \cup B \cup C)) - n(B \cup C)$

$= 30 - 26 = 4$

$n(B-(A \cup C)) = n((A \cup B \cup C)) - n(A \cup C)$

$= 30 - 27 = 3$

Ans : จากแผนภาพ $= 30 - 4 - 3$

$= 23$

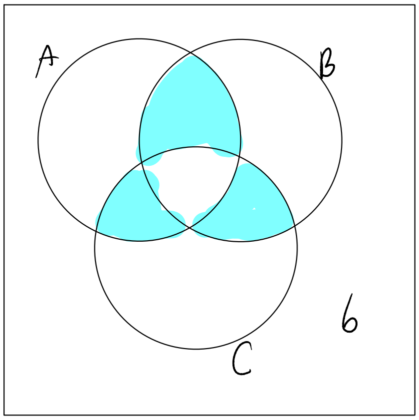
โจทย์เพิ่มเติม

1. ให้ U เป็นเอกภพสัมพัทธ์และ $A,\ B,\ C$ เป็นสับเซตของ U ถ้า

$A \cap B = B \cap C = A \cap C = A \cap B \cap C,$

$n(A) = n(B) = n(C) = 10, n(U) = 30$ และ

$= \phi$ $n((A \cup B \cup C)') = 6$ จงหาค่า $n((A \cup B) \cap C')$



ให้ $n(A \cap B \cap C) = x$

$n(A \cup B \cup C) = n(U) - n((A \cup B \cup C)')$

$30 - 2x = 30 - 6$

$x = 3$

$n((A \cup B) \cap C') = 2(10 - x) = 14$

2. กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$ จงหาจำนวนสับเซต C ของ A ซึ่ง $C \cap B$ มีสมาชิก 2 ตัว

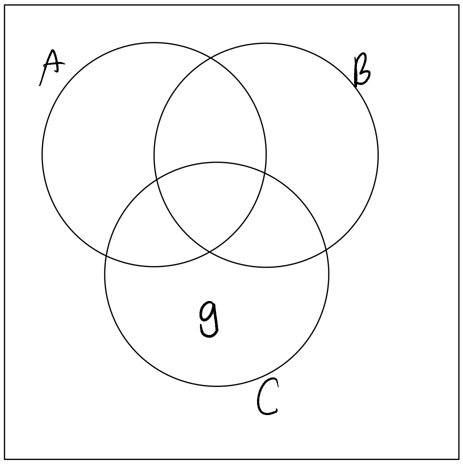
พิจารณาสมาชิก $A-B = \{1, 2, 7, 8\}$ แต่ละตัวเลือกจะอยู่/ไม่อยู่ใน C ก็ได้

ทำได้ $= 2^4 = 16$ วิธี

สมาชิกใน $B = \{3, 4, 5, 6\}$ เลือกได้ $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$ วิธี

$\therefore$ สร้าง $C \subset A$ ได้ $= 16 \cdot 6 = 96$ วิธี

3. ให้ $n(S)$ แทนจำนวนสมาชิกของเซต S ถ้า A, B, C เป็นเซต โดยที่ $n(A) + n(B) + n(C) = 199, n(A \cup B \cup C) = 100,$ $n((A \cup B) - C) = 35$ และ $n(C - (A \cup B)) = 9$ จงหาค่า $n(A \cap B)$



$C = [A \cup B \cup C] - [(A \cup B) - C]$

$n(C) = n(A \cup B \cup C) - n((A \cup B) - C)$

$= 100 - 35 = 65$

$n(A) + n(B) = 199 - n(C)$

$= 199 - 65$

$= 134$

$n(A \cup B) = n(A \cup B \cup C) - n(C - (A \cup B))$

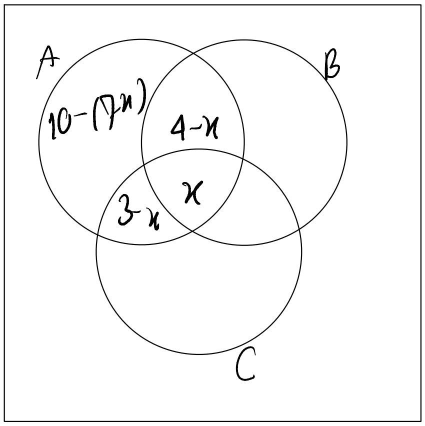
$= 100 - 9 = 91$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$91 = 134 - n(A \cap B)$

$n(A \cap B) = 43$

4. ให้ $n(S)$ แทนจำนวนสมาชิกของเซต S ถ้า A, B, C เป็นเซตโดยที่ $n(A) = 10$, $n(A \cap B) = 4$, $n(A \cap C) = 3$ และ $n(A \cup B \cup C) = 18$ จงหาค่ามากที่สุดที่เป็นไปได้ของ $n(B \cup C)$



ให้ $n(A \cap B \cap C) = x$

และเติมข้อมูลที่มีในแผนภาพ

$$n(B \cup C) = n(A \cup B \cup C) - n(A - (B \cup C))$$

$$= 18 - (3 + x)$$

$$= 15 - x$$

จาก $3 - x \geq 0 \wedge x \geq 0 \wedge x \in \mathbb{N}_0$

$x \in \{0, 1, 2, 3\}$

$\therefore$ $n(B \cup C)$ มากสุด $= 15 - 0 = 15$

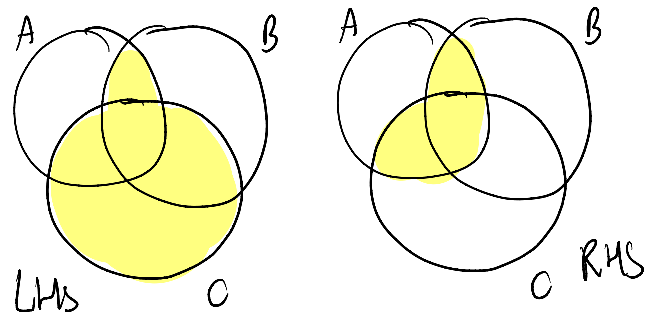
5. กำหนดให้ $P(S)$ แทนเพาเวอร์เซตของเซต S ให้ A, B, C เป็นเซตใดๆ พิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้จริงหรือเท็จ

A. $(A \cap B) \cup C \;=\; A \cap (B \cup C)$

B. $P(A) \;-\; P(B) \subset P(A \;-\; B)$

C. $P(P(\emptyset)) \subset P\,(P(P(\emptyset)))$

A



$\therefore$ A เท็จ

B. ให้ $A = \{1,2\}$ $\quad B = \{1\}$

$P(A) - P(B) = \{\{2\}, \{1,2\}\}$

$P(A-B) = \{\emptyset, \{2\}\}$

$P(A) - P(B) \not\subset P(A-B)$

$\therefore$ B เท็จ

C. พิจารณา

$P(P(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

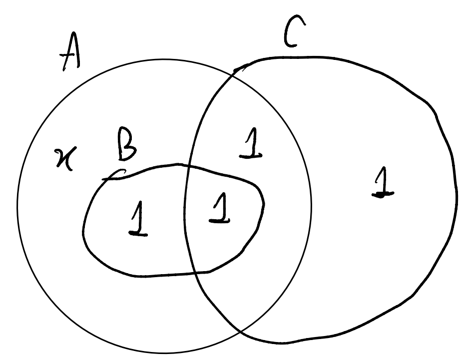
พิจารณาการสร้างสมาชิกในเซต ใน $P(P(P(\emptyset)))$

ได้ว่า $\forall x \in P(P(\emptyset)) \rightarrow x \in P(P(P(\emptyset)))$

$\therefore P(P(\emptyset)) \subset P(P(P(\emptyset)))$

C เป็นจริง

6. ให้ $P(S)$ แทนเพาเวอร์เซตของเซต S และ ให้ A, B, C เป็นเซตจำกัด โดยที่ $B \subset A$ และ $A \cap C \neq \emptyset$ ถ้า $n(P(P(B))) = n(P(B \cup C)) = 16$, $n(B \cap C) = 1, n(A \cap C) = 2$ และ $n(P(A - C)) = 4n(P(C - A))$ จงหาค่าของ $n(P(A))$



จาก $n(P(x)) = 2^{n(x)}$

$n(P(P(B))) = 16 \rightarrow n(B) = 2$

$n(P(B \cup C)) = 16 \rightarrow n(B \cup C) = 4$

$n(B \cup C) = n(B) + n(C) - n(B \cap C)$

$4 = 2 + n(C) - 1$

$n(C) = 3$

ให้ $n(A-(B \cup C)) = x$

$n(P(A-C)) = 4n(P(C-A))$

$2^{n(A-C)} = 2^2 \cdot 2^{n(C-A)}$

$n(A-C) = 2 + n(C-A)$

$x + 1 = 2 + 1$

$x = 2$

$n(P(A)) = 2^{x+3} = 2^5 = 32$

7. ในการสำรวจตัวอย่างเกี่ยวกับความชอบเรียนวิชาคณิตศาสตร์ วิชาภาษาอังกฤษ และวิชาภาษาไทย โดยชอบเรียนวิชาดังกล่าวอย่างน้อย 1 วิชา ได้ข้อมูลว่า

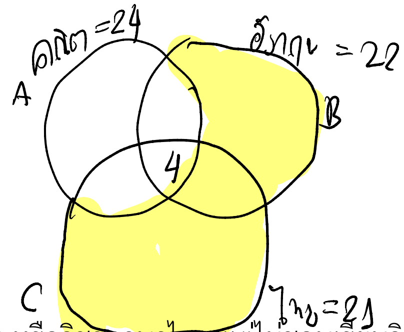
มี 24 คน ชอบเรียนวิชาคณิตศาสตร์

มี 22 คน ชอบเรียนวิชาภาษาอังกฤษ

มี 21 คน ชอบเรียนวิชาภาษาไทย

มี 21 คน ชอบเรียนเพียงวิชาเดียว

และมี 4 คนชอบเรียนทั้งสามวิชา



จงหาจำนวนคนที่ชอบเรียนวิชาภาษาอังกฤษ หรือวิชาภาษาไทย แต่ไม่ชอบเรียนวิชาคณิตศาสตร์

ให้คนชอบ 2 วิชา $= x$

หา $n(A \cup B \cup C) - n(A) = ?$

พิจารณา $n(A)+n(B)+n(C) = 1($ ชอบวิชาเดียว $) + 2 \times$ ชอบ 2 วิชา $+ 3 \times$ ชอบ 3 วิชา

$$\cancel{21} + \overset{10}{\cancel{22}} + 24 = \cancel{21} + 2(x) + 3 \times \cancel{4}$$

$$x = 17$$

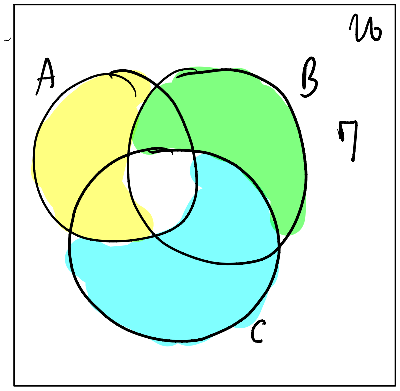
$$n(A \cup B \cup C) = n(A)+n(B)+n(C) - x - 2(4)$$

$$= 21 + 22 + \overset{-1}{\cancel{24}} - \cancel{17} - \cancel{8}$$

$$= 42$$

$$n(A \cup B \cup C) - n(A) = 42 - 24 = 18$$

8. $n(U) = 70$ ให้ A, B, C เป็นสับเซตของ U โดยที่ $A \cap B \cap C \neq \emptyset$ และ
$n(A \cap B') = 25, n(B - C) = 18, n(C \cap A') = 16$ และ
$n((A \cup B)' - C) = 7$ จงหาค่าของ $n(A \cap B \cap C)$

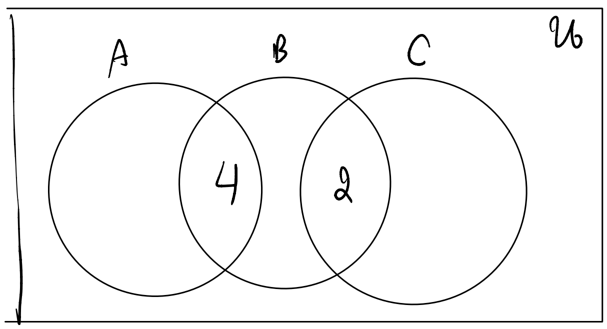


$n(U) = n(A \cap B') + n(B - C) + n(C \cap A') + n((A \cup B \cup C)') + n(A \cap B \cap C)$

$70 = 25 + 18 + 16 + 7 + n(A \cap B \cap C)$

$n(A \cap B \cap C) = 4$

9. ให้ A, B, C เป็นสับเซตของเอกภพสัมพัทธ์ U โดยที่ $A \cap C = \emptyset, A - B \neq \emptyset,$
$B - A \neq \emptyset, B - C \neq \emptyset$ และ $C - B \neq \emptyset$ ให้ $n(U) = 20,$
$n(A') = 12, n(B') = 9, n(C') = 15,$
$n((A - B) \cup (B - A)) = 11$ และ
$n((B - C) \cup (C - B)) = 12$
จงหาค่าของ $n((A - B) \cup (C - B))$



$n(A') = 12$ $\quad n(A) = n(U) - n(A')$

$= 8$

$n(B') = 9$ $\quad n(B) = 20 - 9 = 11$

$n(C') = 15$ $\quad n(C) = 20 - 15 = 5$

$n((A-B)\cup(B-A)) + 2n(A\cap B) = n(A) + n(B)$

$\cancel{11} + 2n(A\cap B) = \cancel{11} + 8$

$n(A\cap B) = 4$

$n((B-C)\cup(C-B)) + 2n(B\cap C) = n(B) + n(C)$

$12 + 2n(B\cap C) = 11 + 5$

$n(B\cap C) = 2$

$n((A-B)\cup(C-B)) = n(A) - 4 + n(C) - 2$

$= 7$

10. ให้ A, B เป็นสับเซตของเอกภพสัมพัทธ์ U ถ้า 20% ของสมาชิกในเซต A เป็นสมาชิกในเซต B, 25% ของสมาชิกในเซต B เป็นสมาชิกในเซต A และ $n((A - B) \cup (B - A)) = 112$ จงหาค่าของ $n(A \cup B)$

$$n(A \cap B) = n(B \cap A)$$

$$\frac{20}{100} \cdot n(A) = \frac{25}{100} \cdot n(B)$$

$$4n(A) = 5n(B)$$

ให้ $n(A) = 5x$ $\quad n(B) = 4x$ $\quad n(A \cap B) = x$

$$n((A-B) \cup (B-A)) = 7x = 112$$

$$x = 16$$

$$n(A \cup B) = 8x = 128$$

11. ให้ $A = \{x | x = 2k , \exists k \in \{1, 2, 3,..., 50\}\}$ และ

$B = \{x \in A \mid x = 3k , \exists k \in \{1, 2, 3,..., 50\}\}$

จงหาค่าของ $n(P(B))$ ในรูปเลขยกกำลัง

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 6k , \exists k \in \mathbb{N} , x \leq 100\}$

$n(B) = \left\lfloor \frac{100}{6} \right\rfloor = 16$

$n(P(B)) = 2^{16}$

12. ให้ A, B เป็นเซตจำกัด โดยที่จำนวนสมาชิกของ $P(A)$ เป็นสองเท่าของจำนวนสมาชิกของ $P(B)$, $n(P(A \cap B)) = 8$ และ $n(P(A \cup B)) = 256$ จงหาค่าของ $n(P(A - B))$

$P(A) = 2 \cdot P(B)$

$2^{n(A)} = 2^{1} \cdot 2^{n(B)}$

$n(A) = 1 + n(B)$

$n(P(A \cap B)) = 8 \rightarrow n(A \cap B) = 3$

$n(P(A \cup B)) = 256 \rightarrow n(A \cup B) = 8$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

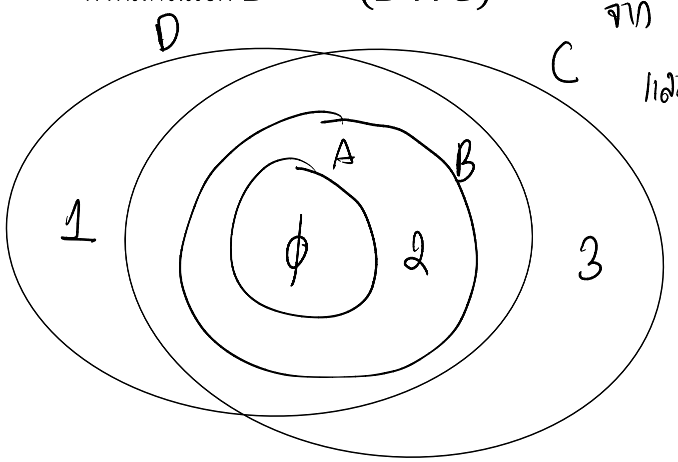
$11 = 1 + 2n(B)$

$n(B) = 5 \rightarrow n(A) = 6$

$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 6 - 3 = 3$

$n(P(A - B)) = 2^{n(A-B)} = 2^{3} = 8$

13. ให้ $A,\ B,\ C\ ,\ D$ เป็นเซตที่แตกต่างกัน และต่างก็เป็นสับเซตของเซต $\{1,\ 2,\ 3\}$ ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไข $2 \in C,\ 3 \notin D,\ A \subset B,\ B \subset C,\ B \subset D,\ D \not\subset C$ จงหาผลรวมของสมาชิกทั้งหมดในเซต $D\ -\ (B \cap C)$



จาก $(C-D)\cap(D-C)=\phi$

และ $C-D=\phi$, $D-C=\phi$

$n(B)=1$ $n(A)=0$

$n(C)=2$ $n(D)=2$

จาก $3 \notin D \to 3 \in C-D$

$2 \in C \to 2 \in B$

เหลือ $1 \in D-C$

จาก $D-(B\cap C) = D-C = \{1\}$

ผลรวมสมาชิก = 1

14. กำหนดให้ $A = \{3, 8, 9\}, B = \{0, 1\}$ และ $C = \{2, 4\}$ จงหา

จำนวนสมาชิกของเซต

$$\{(x, y) \in A \times N \mid \forall w \in B\, \forall z \in C\, [(x - y > w) \wedge (x - y \geq z)]\}$$

จาก $x-y \geq z > w$

$\therefore$ คิดแค่ $x-y \geq z$; $z = \max C = 4$

จำนวน y ใส่ได้ $= x - z$

เมื่อ $x=3$ $z=4$; $y \in \{\}$

$x=8$ $z=4$; $N = 8-4 = 4$

$x=9$ $z=4$; $N = 9-4 = 5$

$N_{รวม} = 4+5 = 9$