

ทบทวนเรื่องที่ต้องใช้

สัญลักษณ์ของเซต

สัญลักษณ์	ความหมาย
\mathbb{N}	เซตของจำนวนนับ
\mathbb{Z}	เซตของจำนวนเต็ม
\mathbb{Q}	เซตของจำนวนตรรกยะ
\mathbb{Q}'	เซตของจำนวนอตรรกยะ
\mathbb{R}	เซตของจำนวนจริง
$a \in A$	a เป็นสมาชิกในเซต A

การอ่านเซตแบบบอกเงื่อนไข

เช่น $r = \{(x, y) \in A \times B \mid \text{เงื่อนไข} : x = y\}$

จะบอกว่า สนใจขอบเซต $x \in A$ และ $y \in B$ โดยมีเงื่อนไขว่าจะเป็นสมาชิกของ r เมื่อ $x = y$

กราฟที่ควรรู้จัก

จงวาดกราฟคร่าวๆ โดยควรมีจุดหลักๆ(ถ้ามี) คือ จุดตัดแกน x และ y จุดสูงสุดต่ำสุดสัมพัทธ์ และแนวโน้มที่ถูกต้อง โดยไม่ต้องตามสเกลจริงก็ได้

กราฟเส้นตรง

1. $y = x$

2. $y = 2x + 1$

3. $y = mx + b$ เมื่อ $m, b \in \mathbb{R}$

กราฟพาราโบลา

4. $y = x^2$

5. $y = -(x - 1)^2$

6. $y = (x + 2)^2 - 1$

7. $y = a(x - h)^2 + k$ เมื่อ $a, h, k \in \mathbb{R}$ และ $a > 0$

8. $y = a(x + h)^2 - k$ เมื่อ $a, h, k \in \mathbb{R}$ และ $a < 0$

9. $y = ax^2 + bx + c$ เมื่อ $a, b, c \in \mathbb{R}$ และ $a > 0$

กราฟค่าสัมบูรณ์

10. $y = |x|$

11. $y = x^2 + 2|x| - 8$

12. $|y| + |x| = 3$

ความสัมพันธ์

คู่อันดับ

คือ การนำสิ่ง สองสิ่ง มาเขียนคู่กัน โดยมีลำดับ ซึ่งคู่อันดับ a, b เขียนแทนด้วย (a, b) โดยเรียก a ว่า สมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับ และเรียก b ว่า สมาชิกตัวหลังของคู่อันดับ

การเท่ากันของคู่อันดับ หมายถึง $[x_1, y_1) = (x_2, y_2)] \leftrightarrow [x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2]$

เช่น จงหาค่าของ a, b เมื่อ $(a + 1, 2b) = (-5, 12)$

จะได้ว่า $a + 1 = -5$ หาค่า $a = -6$

และ $2b = 12$ หาค่า $b = 6$

1. จงหาค่าของ a, b เมื่อ $(a + b, a - b) = (5, -3)$

2. จงหาค่าของ a, b เมื่อ $(a + b, b^2 + a + 1) = (2a - b, 4)$

ผลคูณคาร์ทีเซียน

เป็นการกระทำกันระหว่างเซต 2 เซต โดยผลคูณคาร์ทีเซียนระหว่างเซต A และ B เขียนแทนด้วย $A \times B$ ซึ่ง

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

โดยจากนิยามนี้เห็นได้ชัดว่า $n(A \times B) = n(A) * n(B)$

ข้อควรระวัง $A \times B \neq B \times A$

จงเขียน $A \times B$ ในรูปเซตของคู่อันดับ

1. $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{1, 2\}$

2. $B = \{1, 2, 3\}$ และ $A = \{1, 2\}$

3. $A = \{\}$ และ $B = \{1, 2, 3, 4\}$

4. $A = \{1, 2\}$ และ $B = B_1 \cup B_2$ โดย $B_1 = \{1, 2\}$, $B_2 = \{3, 4\}$

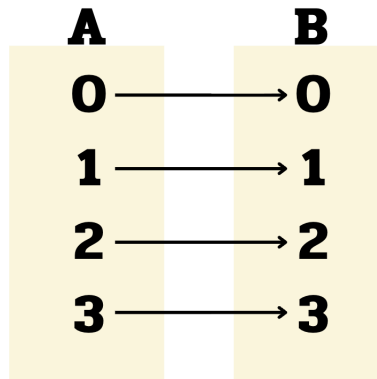
5. $A = \{1, 2\}$ และ $B = A \times A$

ความสัมพันธ์

ความสัมพันธ์คือ ความเกี่ยวข้องกันระหว่างกลุ่มสองกลุ่ม

เช่น สมมติความสัมพันธ์ $f: A \rightarrow B$ โดย $A, B \in \{0, 1, 2, 3\}$ เมื่อ $a \in A, b \in B \rightarrow$

$a = b$ สามารถวาดความสัมพันธ์ได้ดังแผนภาพ



และเรายังสามารถใช้เซตของคู่อันดับในการเขียนความสัมพันธ์แบบแจกแจงสมาชิกได้ โดยให้

$$r = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$$

และสามารถเขียนในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไขได้เป็น

$$r = \{(x, y) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid x = y \wedge x < 4\}$$

ให้ $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ และ $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ จงเขียนความสัมพันธ์ต่อไปนี้แบบแจกแจงสมาชิก

- $r = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x\}$

2. $r = \{(x, y) \in A \times B \mid y > 5x\}$

3. $r = \{(x, y) \in A \times B \mid y < x - 9\}$

4. $r = \{(x, y) \in B \times A \mid y = |x - 5|\}$

5. $r = \{(x, y) \in A \times A \mid y = \frac{5x}{3}\}$

6. $r = \{(x, y) \in B \times B \mid x - y = -2\}$

7. $r = \{(x, y, z) \in A \times A \times B \mid z > 2x + 3y + 1\}$

กราฟของความสัมพันธ์

กราฟของความสัมพันธ์

ปกติแล้วถ้า $r = \{(x, y) \in A \times A \mid x = y\}$ โดย A เป็นเซตจำกัดจะได้ว่ากราฟความสัมพันธ์
คาร์ทีเซียนเป็นกราฟจุดและไม่ต่อเนื่อง พอกำหนดใหม่ $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = y\}$ จะมีจุดต่างๆที่
ทำให้กราฟต่อเนื่องและเป็นเส้น

จงวาดกราฟแสดงความสัมพันธ์ $r_1 = \{(x, y) \in A \times A \mid x = y\}$ และ

$r_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = y\}$ โดย $A \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

เนื่องจากในมอปลายส่วนใหญ่ ถ้าไม่ได้เรียนในเรื่องจำนวนเชิงซ้อนจะเข้าใจตรงกันว่าเป็นจำนวนจริง จึงค่อนข้างละ
 $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \dots\}$ ไว้ในฐานที่เข้าใจ เช่นถ้าบอกว่า $y = x^2$ จะรู้ว่าหมายถึง
 $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2\}$

โดยความสัมพันธ์ใน $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ส่วนใหญ่กราฟจะต่อเนื่องและเป็นเส้น วิธีวาดกราฟจึงสามารถพล็อตจุดหลักๆ(ถ้ามี)
คือ จุดตัดแกน x และ y จุดสูงสุดต่ำสุดสัมพัทธ์ และแนวโน้มที่ถูกต้อง โดยสามารถลองแทนค่าเพื่อหาแนวโน้มได้

จงพิจารณาความสัมพันธ์ต่อไปนี้ว่ามี $(x, y) = (-1, 1)$ เป็นสมาชิกหรือไม่

1. $y = |x|$

2. $y = \sqrt{x} - 2$

3. $y = 3^x - 4$

4. $x^2 + 2y^2 = 3$

จงเขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ต่อไปนี้

1. $-2 < x + y \leq 2$

2. $x^2 + y^2 < 9$

3. $x^3 < y \leq x^2$

โดเมนและเรนจ์

โดเมนและเรนจ์

ถ้ามีความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \dots\}$ จะได้ว่าโดเมนเขียนแทนด้วย D_r เป็นเซตของค่า

$x \in \mathbb{R}$ ที่ได้ใช้ และเรนจ์เขียนแทนด้วย R_r เป็นเซตของค่า $y \in \mathbb{R}$ ที่ได้ใช้

ตัวอย่าง ให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y = 3x + 1\}$ จากการลองแทนค่าและพิจารณาแบบ
แจกแจงสมาชิก ได้ว่า $x \in \{1, 2, 3, \dots\}$ และ $y = \{4, 7, 10, \dots\}$ จะได้ว่า $D_r = \mathbb{N}$ และ

$$R_r = \{t \in \mathbb{N} \mid t = 3x + 1, x \in \mathbb{N}\}$$

จงหาโดเมนและเรนจ์

ฟังก์ชันเส้นตรง

1. $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 2x\}$

2. $r = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \mid x = 3y - 4\}$

ฟังก์ชันพหุนามดีกรี 2

3. $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2\}$

4. $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = y^2 - 1\}$

5. $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 2x = (y - 2)(y - 4)\}$

ฟังก์ชันแบบอื่น ๆ

6. $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + 4y^2 < 9\}$

7. $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid xy = 1\}$

8. $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 - y^2 = 1\}$

9. $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{2x+1}{x-4}\}$

10. $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = \frac{3y}{\sqrt{y+2}}\}$

11. $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid xy - 3x + 2y + 8 = 0\}$

$$12. r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{4 - x^2} + 1\}$$

$$13. r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{x^2 - 7x + 6}\}$$

$$14. r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{\frac{(x+3)(2-x)}{(x-1)}}\}$$

ฟังก์ชัน

ฟังก์ชัน

ฟังก์ชันคือความสัมพันธ์ที่ x แต่ละตัวจับคู่ y ได้มากที่สุด 1 ตัว หรือนิยามว่า เมื่อ for all $x \in \mathbb{R}$

$$[f(x_1) \neq f(x_2)] \rightarrow [x_1 \neq x_2]$$

ตัวอย่าง พิจารณาว่า $x = y^2$ เป็นฟังก์ชันหรือไม่

พิจารณา $y = \pm \sqrt{x}$ เห็นได้ว่ามี $y_1 \neq -y_1$ แต่ให้ $x = y_1^2$ เหมือนกัน ดังนั้นไม่เป็นฟังก์ชัน

หรือจะพิจารณาจากการวาดกราฟ แล้วพิจารณาเส้น $x = k$ ใดๆ เมื่อ $k \in \mathbb{R}$ แล้วมีคำตอบมากกว่า 2 จุด ก็จะไม่เป็นฟังก์ชัน

จงพิจารณาต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันหรือไม่

1. $x = y$

2. $y = 2x + 1$

3. $y = (x + 1)^2$

4. $x = (y - 1)^2$

5. $y = x^2 + x - 6$

6. $x^2 + y^2 = 1$

7. $x = |y + 1|$

8. $x = y^3$

9. $|x| + |y| = 1$

10. $(x - y)(x + y) = 4$

11. $x < y^3$

ฟังก์ชัน 1-1 ที่ไปถึง

ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ($f: 1 - 1$)

นิยาม ไม่มีสมาชิกตัวหน้าซ้ำกันที่ให้ผลลัพธ์เป็นสมาชิกตัวหลังตัวเดียวกัน หรือ for all $x \in \mathbb{R}$

$$[f(x_1) = f(x_2)] \rightarrow [x_1 = x_2]$$

ตัวอย่างพิจารณาว่าฟังก์ชัน $y = x^2 + 1$ เป็น $f: 1 - 1$ หรือไม่

Step1: พิจารณาว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่

พิจารณาจากกราฟ $y = x^2 + 1$ ค่า x ใดๆ ให้ค่า y ได้เพียง 1 ค่า ดังนั้นเป็นฟังก์ชัน

Step2: พิจารณาว่าเป็นฟังก์ชัน $1 - 1$ หรือไม่

$$\text{พิจารณา } f(x_1) = f(x_2): x_1^2 + 1 = x_2^2 + 1$$

$$x_1^2 = x_2^2 \text{ เห็นได้ว่ามี } x_1 = -x_2 \text{ ดังนั้น ไม่เป็นฟังก์ชัน } 1 - 1$$

พิจารณาความสัมพันธ์ต่อไปนี้ว่าเป็นฟังก์ชัน $1 - 1$ หรือไม่

- $x = 2y + 1$

2. $y = (x - 1)^2 + 1$

3. $x^2 + y^2 = 4$

4. $y = e^x - 1$

5. $y = x + \frac{1}{x}$

ฟังก์ชันทั่วถึง (onto function)

ให้ $f: X \rightarrow Y$ สำหรับทุก $y \in Y$ จะมี $x \in X$ ที่ทำให้ $f(x) = y$ เสมอ หรือคือทุก $y \in Y$ มี x ที่ทำให้เกิดได้

ตัวอย่างพิจารณาว่า $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y = x^2 + 1$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึงหรือไม่

Step1: พิจารณาว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่

พิจารณาจากกราฟ $y = x^2 + 1$ ค่า x ใดๆ ให้ค่า y ได้เพียง 1 ค่า ดังนั้นเป็นฟังก์ชัน

Step2: พิจารณาว่าเป็นฟังก์ชันทั่วถึงหรือไม่

พิจารณา $x^2 \geq 0 \rightarrow x^2 + 1 \geq 1$ ดังนั้น $y = x^2 + 1$ ไม่เป็นฟังก์ชันทั่วถึง เนื่องจากหาค่า $y = -1$ จะไม่มีค่า x ที่ทำให้เกิดค่า y

พิจารณาความสัมพันธ์ต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันทั่วถึงหรือไม่

1. $x = 2y + 1$

2. $y = (x - 1)^2 + 1$

3. $x^2 + y^2 = 4$

4. $y = \frac{1}{x}$

5. $y = \log(x)$

ฟังก์ชันประกอบ

ฟังก์ชันประกอบ

ให้ $f: A \rightarrow B$ และ $g: B \rightarrow C$ จะได้ว่า $g \circ f: A \rightarrow C$

จะเห็นว่า B เป็นทั้ง R_f และ D_g ดังนั้นจะมี $g \circ f$ ได้เมื่อ $R_f \cap D_g \neq \emptyset$ และ

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\}$$

ตัวอย่าง ให้ $f(x) = 2x - 3$ และ $g(x) = x^2 + 5$ หา $(g \circ f)(1)$

$$\text{จาก } g \circ f = g(f(x)) = g(2x - 3) = (2x - 3)^2 + 5$$

$$(g \circ f)(1) = (2 * 1 - 3)^2 + 5 = 6$$

จงหา $(g \circ f)(x)$ และ $(f \circ g)(x)$ และ $(f \circ g)(1)$ ต่อไปนี้

1. $f(x) = x + 1$ และ $g(x) = 1$

2. $f(x) = x + 1$ และ $g(x) = x$

3. $f(x) = x - 1$ และ $g(x) = x + 2$

4. $f(x) = 2x + 3$ และ $g(x) = x - 5$

5. $f(x) = x^2 + 1$ และ $g(x) = 2x - 1$

6. $f(x) = \frac{1}{x+1}$ ແລະ $g(x) = \frac{1}{x-2}$

7. $f(x) = \frac{1}{x+1}$ ແລະ $g(x) = x^2 + 2x$

อินเวอร์สฟังก์ชัน

อินเวอร์สฟังก์ชัน

ให้มีความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \in A \times B \mid \text{condition}\}$ จะมี

$r^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \mid \text{same condition}\}$ คืออินเวอร์สความสัมพันธ์ของ r เป็นความสัมพันธ์ที่โยงกลับทางจาก r

และ เมื่อ r เป็นฟังก์ชัน $1 - 1$ จะได้ว่า ความสัมพันธ์ r^{-1} จะเป็นฟังก์ชัน

การวาดกราฟ สามารถวาดได้จากการสะท้อนข้าม $y = x$ หรือหาสมการอินเวอร์สก็ได้

ตัวอย่าง จงหาอินเวอร์สความสัมพันธ์ $y = x^2$ และพิจารณาว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่

หาอินเวอร์สฟังก์ชัน: สลับ x, y ในความสัมพันธ์ ได้ว่า $x = y^2$

จากนั้นจัด y ในรูปของ x ได้ว่า $f^{-1}(x) = \pm \sqrt{x}$

จาก $y = x^2$ ไม่เป็นฟังก์ชัน $1 - 1$ ดังนั้น $f^{-1}(x)$ ไม่เป็นฟังก์ชัน

จงหาอินเวอร์สความสัมพันธ์และวาดกราฟและพิจารณาว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่

1. $f = \{(1, 1), (2, 3), (4, 5), (-1, 1)\}$

2. $f(x) = x - 3$

3. $f(x) = 2 - x$

4. $f(x) = \frac{1-x}{2}$

5. $f(x) = \frac{x}{2} + 1$

6. $f(x) = 4 - 3x$

7. $f(x) = \frac{1}{x+2}$

8. $f(x) = \frac{1-x}{x+3}$

9. $f(x + 3) = \frac{2x+5}{1-x}$

10. $f(x) = 2^x$

ตะลุยโจทย

1. ให้ $f(x) = 1 - 2x - x^2$ จงหา $f(1 - x)$, $f(x^2)$, $f(-x)$

2. $f(2x + 1) = 4x + 3$ จงหา $f(f(f(x))) - x$

3. ให้ $f\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{1}{x}$ เมื่อ $x \neq 0, 1$ จงหา $g(x) = f(f(x))$ และ D_g

4. ให้ $f = \{(1, 0), (2, 1), (3, 5), (4, 3), (5, 2)\}$ จงหา
 $f^{-1}(f^{-1}(2)) + f^{-1}(3)$

5. หา D_f, R_f ของ $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{x}{x^2+3x+2} + \frac{2x-1}{x^2-1}\}$

6. ให้ $f(x) = \sqrt{3 - x}$ และ $g(x) = -2 + |x - 4|$ จงหา $D_{g \circ f}$ และ $R_{g \circ f}$

7. ให้ $f(x) = \sqrt{3 - x^2}$ และ $g(x) = \sqrt{1 + x^2}$ จงหา $D_{g \circ f}$ และ $R_{g \circ f}$ และหาว่า $(g \circ f)^{-1}(x)$ เป็นฟังก์ชันหรือไม่

8. ให้ $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ และ
 $r = \{(x, y) \in A \times A \mid y = |x| - 2\}$ จงหาว่า r^{-1} เป็นฟังก์ชันหรือไม่ และ
 $n(r \cap r^{-1})$ และ $D_{r^{-1}}, R_{r^{-1}}$

9. ให้ $f(x) = \frac{1-x}{x+2}$ เมื่อ $x \in \mathbb{R} - \{-2\}$ และ a เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับ $f(a + f^{-1}(2)) = 1$ จงหาค่าของ a

10. ให้ $f(x) = \sqrt[3]{x}$ และ $g(x) = \frac{x}{1+x}$ หาค่าของ $(f^{-1} + g^{-1})(2)$

11. ให้ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ และ $B = \{a, b, c\}$ ให้ $S = \{f \mid f: A \rightarrow B \text{ เป็นฟังก์ชัน}$
ทั่วถึง} จงหา $n(S)$

12. ให้ $f(x) = 3x - 5$ และ $g(x) = 2x + 1$ ให้
 $\exists a \in \mathbb{R}, (g^{-1} \circ f^{-1})(a) = 4$ จงหา $(f \circ g)(2a)$

13. หา D_f และ R_f เมื่อ $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x^2-4}} - \sqrt{x-1}$

14. ให้ $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข

$$f(1) = 1$$

$$f(2x) = 4f(x) + 6$$

$$f(x + 2) = f(x) + 12x + 12$$

จงหาค่าของ $f(7) + f(16)$

15. ให้ $f(x) = \frac{x+3}{x+6}$ และ $(f^{-1} \circ g)(x) = \frac{-6x}{x-1}$ หาค่า a ที่ทำให้ $g(a) = 2$

16. ให้ $f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = x$ จงหา $f(f(x))$

17. ให้ $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ที่สอดคล้องกับ $f(x + y) = f(x) + f(y) + 4xy$ และ $f(1) = 4$ หาค่าของ $f(20)$

18. $r = \{(x, y) \in R \times R \mid |x|y + y - x - 1 = 0\}$ พิจารณา

D_r, R_r, r เป็นฟังก์ชันทั่วถึงหรือไม่ และพิจารณาว่า r^{-1} เป็นฟังก์ชันหรือไม่

19. ให้ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x + 5) = x^3 - x^2 + 2x$ และ $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 $g^{-1}(2x - 1) = x + 4$ จงหา $(f - g)(0)$ และ $(g \circ f)(x)$

20. ให้ f เป็นฟังก์ชันพหุนาม $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(f \circ f)(x) = 4 + x(4 - f(x))$ จงหาค่า $f(4)$

21. ให้ $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ และ $f: A \rightarrow A$ และ f เป็นฟังก์ชัน $1 - 1$ และทั่วถึง กำหนดค่าบางค่าในตาราง

x	$f(x)$	$f^{-1}(x)$
-1	1	2
0	2	1
1	0	a

จงหาค่าของ $a + f(-2) + f^{-1}(2)$