

## Differentiation

Differentiation: คือ การหาอนุพันธ์ หรือ ความชันของฟังก์ชัน ณ จุดใดจุดหนึ่ง

สูตรการดิฟพื้นฐาน ให้  $C$  แทนค่าคงที่:

1.  $\frac{d}{dx}[C] = 0$
2.  $\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$  เมื่อ  $n$  เป็นค่าคงที่
3.  $\frac{d}{dx}[Cx^n] = C\frac{d}{dx}[x^n]$
4.  $\frac{d}{dx}[a + b] = \frac{d}{dx}[a] + \frac{d}{dx}[b]$

ตัวอย่าง

$$\frac{d}{dx}[x^5 + x^{4.2} + 3] = 5x^{5-1} + 4.2x^{4.2-1} + 0 = 5x^4 + 4.2x^{3.2}$$

จงดิฟพจน์ต่อไปนี้โดยใช้สูตรการดิฟพื้นฐาน

1.  $5$

2.  $x$

3.  $x^{100}$

4.  $5x^{0.5}$

5.  $8x^{2.5} + 888\pi$

6.  $(x^5)(x^2 + 2) + \pi^7$

7.  $x^{-2.3} + x^3 + 3x$

8.  $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \frac{x^{2.5}}{x^{5.2}}$

Diff ผลคูณ

Product Rule (Diff ผลคูณ)

ให้  $u$  และ  $v$  สามารถเขียนในฟังก์ชันของ  $x$  ได้

$$\frac{d}{dx}uv = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

ตัวอย่าง

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x^5)(x^2 + 2) &= x^5 \frac{d(x^2+2)}{dx} + (x^2 + 2) \frac{d(x^5)}{dx} \\ &= x^5(2x + 0) + (x^2 + 2)(5x^4) = 7x^6 + 10x^4\end{aligned}$$

จงดิฟเฟอร์นเชียลต่อไปนี้โดยใช้ Product Rule

1.  $\sqrt{x}(x^2 - 1)$

2.  $x(1 + x)^5$

3.  $4(x - 2)^2(x + 1)^2$

4.  $(x - 2)^2(2x + 2)^2$

5.  $(x - 1)(x + 1)^{-1}$

Diff ผลหาร

Quotient Rule (Diff ผลหาร)

ให้  $u$  และ  $v$  สามารถเขียนในฟังก์ชันของ  $x$  ได้

$$\frac{d}{dx} \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

ตัวอย่าง

$$\frac{d}{dx} \frac{x}{2x+5} = \frac{(2x+5) \frac{dx}{dx} - x \frac{d(2x+5)}{dx}}{(2x+5)^2} = \frac{(2x+5) - (2x)}{(2x+5)^2} = \frac{5}{(2x+5)^2}$$

จงดิฟเฟอเรนเชียลต่อไปนี้โดยใช้ Quotient Rule

1.  $\frac{5x}{x+1}$

2.  $\frac{2x}{3x-2}$

3.  $\frac{x+3}{2x+1}$

4.  $\frac{3x^2+1}{(x+1)^2}$

5.  $\frac{6x}{(x+3)^{0.5}}$

## Chain Rule

Chain Rule (Diff ด้วยกฎลูกโซ่)

ให้มี  $u$  เป็นฟังก์ชันของ  $v$  และ  $v$  เป็นฟังก์ชันของ  $x$  จะเขียน

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

ตัวอย่าง

$$\frac{d}{dx} (2x)^3 \text{ จะมองเป็นฟังก์ชันพื้นฐานว่า } u = v^3 \text{ และ } v = 2x$$

$$\frac{d}{dx} (2x)^3 = \frac{d(v^3)}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = 3v^2 \cdot \frac{dv}{dx} = 3(2x)^2 \cdot \frac{d(2x)}{dx} = 6(2x)^2$$

จงดิฟเฟอร์นเชียลต่อไปนี้โดยใช้ Chain Rule

1.  $(5x + 3)^2$

2.  $(2x^2 + 2x + 3)^3$

3.  $(2(5x + 3)^2 + 3)^4$

4.  $\left(\frac{x}{2x+1}\right)^{420}$

5.  $(x^3 + (4x)^4 + 5((3x + 2)^2)^2)^{420}$

6.  $(\frac{1}{4}\{5x^2 + 3x\}^4 + 3)^2$

7.  $\frac{((2x)^2+3x)^2+1}{((2x)^2+3x)^2}$

8. 
$$\frac{(2x+1)^6+(3x+2)^4+2(2x+1)^3(3x+2)^2+2}{((2x+1)^3+(3x+2)^2)^2+1}$$

Diff อนุพันธ์อันดับสูง

การ Diff อนุพันธ์อันดับสูง( ดิฟหลายๆรอบ )

$$\text{อนุพันธ์อันดับ 1} = \frac{dy}{dx}$$

$$\text{อนุพันธ์อันดับ 2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\text{อนุพันธ์อันดับ } n = \frac{d^n y}{dx^n}$$

ตัวอย่าง จงหาอนุพันธ์อันดับ 2 3 และ 4 ของ  $y = (5x + 3)^3$

$$\frac{dy}{dx} = 3 \cdot (5x + 3)^2 \cdot \frac{d(5x+3)}{dx} = 15 \cdot (5x + 3)^2$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} 15 \cdot (5x + 3)^2 = 15 \cdot 2 \cdot (5x + 3) \cdot \frac{d(5x+3)}{dx} \\ &= 150(5x + 3) \end{aligned}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx} 150(5x + 3) = 150 \cdot 5 = 750$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d}{dx} 750 = 0$$

จงหาอนุพันธ์อันดับ 2 3 และ 4 ของ  $y$  ต่อไปนี้

- $y = \left(\frac{1}{2}x + 3\right)^4$

2.  $y = (2x + 3)^{3.5}$

3.  $y = \frac{1}{x+1}$

4.  $y = \frac{x}{(3x+1)}$

5.  $y = \frac{(3x+1)^2 + 2(3x+2) + 1}{(3x+2)}$

6.  $y = \frac{1}{\sqrt{2x+5}}$

ลิมิต

Limit

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  คือค่าของ  $f(x)$  เมื่อ  $x$  เข้าใกล้  $a$  โดย  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  ก็ต่อเมื่อ

$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  โดยจะพิจารณาเฉพาะลิมิตที่อยู่ในโดเมน

เช่น  $f(x) = \sqrt{x}$  จาก  $0^-$  ไม่อยู่ในโดเมนของ  $f(x)$  จึงจะพิจารณาแค่  $L = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$$

จงพิจารณาว่ามีลิมิตหรือไม่

1.  $\lim_{x \rightarrow -7} 3x + 5$

2.  $\lim_{x \rightarrow 3} x^2$

3.  $\lim_{x \rightarrow -1} x^3 + x$

4.  $\lim_{x \rightarrow 1} |x - 1|$

5.  $\lim_{x \rightarrow 0} x^{420} + 6x + 9$

6.  $\lim_{x \rightarrow 100} \sqrt{x} + 6$

7.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$

8.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+3}{x}$

9.  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  เมื่อ  $f(x) = 5x + 3$  เมื่อ  $x \leq -1$  และ  $f(x) = 2x$  เมื่อ  $x > -1$

10.  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  เมื่อ  $f(x) = x^2 + 4$  เมื่อ  $x < -1$ ,  $f(x) = -4x - 1$  เมื่อ  $x > -1$  และ  $f(-1) = 0$

11.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  เมื่อ  $f(x) = \frac{1}{x}$  เมื่อ  $x < 0$  และ  $f(0) = 0$

โดยสำหรับฟังก์ชันต่อเนื่อง  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$

เช่น  $f(x) = x^2 + 5$  จะได้ว่า  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = f(4) = 4^2 + 5 = 21$

จงหาค่าลิมิตของฟังก์ชันต่อเนื่องต่อไปนี้

1.  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  เมื่อ  $f(x) = x + 4$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  เมื่อ  $f(x) = \frac{1}{x+1}, x > 0$

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  เมื่อ  $f(x) = \frac{\sqrt{x+4}}{x+5}, x > 0$

4.  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$  เมื่อ  $f(x) = x^2 - 5x + 20$

5.  $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$  เมื่อ  $f(x) = x^3 + 4x^2 - 9x + 3$

6.  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  เมื่อ  $f(x) = \sqrt{|x^2 - 10x - 9|}$

7.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  เมื่อ  $f(x) = 2^{-x} + 3^{-x} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$

8.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  เมื่อ  $f(x) = \log(x)$

สมบัติที่ต้องรู้ของลิมิต

สมบัติของลิมิต

การดำเนินการทางคณิตศาสตร์ของฟังก์ชันซึ่งจำนวนพจน์สามารถนับได้ภายในลิมิตสามารถแยกลิมิตเป็นแต่ละส่วนได้โดยแต่ละส่วนคู่เข้าหาจำนวนจริง

$$\text{เช่น } \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 1$$

จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x}$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2+x+3x^4}{x}$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)}{x} \cdot \frac{(x+2)}{x} \cdot \frac{(x+x)}{x}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{1000} \frac{i}{x}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)}{x} \cdot \frac{(x+2)}{x} \cdot \frac{(x+3)}{x} \cdot \dots \cdot \frac{(x+x)}{x}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^x \frac{i}{x}$$

การหาลิมิตที่อยู่ในรูป undefined form

Limit undefined form (ลิมิตไม่สามารถหาค่าได้โดยตรงจากการแทนค่า)

ในมอปลาย ส่วนใหญ่จะเห็นได้บ่อยในรูปที่แทนค่าโดยตรงแล้วจะได้รูป  $\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$ ,  $\infty - \infty$  ซึ่งจะทำให้เกิด 0 หรือ  $\infty$  ออกไปจากเศษหรือส่วน

ทำให้เกิด 0 หรือ  $\infty$  ออกไปจากเศษหรือส่วน

ตัวอย่าง

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+3)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} x + 3 = 5$$

จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้

1.  $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{(x-9)(x-3)}{x-9}$

2.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x - 3}{x^2 - 5x + 6}$

3.  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - x^2 - 17x - 15}{x^3 - x^2 - 16x - 20}$

4.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{6^x - 7 \cdot 2^x - 4 \cdot 3^x + 28}{10^x - 2 \cdot 2^x - 4 \cdot 5^x + 8}$

5.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

6.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x+9}}{x-3}$

7.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$

8.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+\sqrt{x}}{2x+1}$

9.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 1}{x^2 - x^3}$

10.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^8}{(x+2)^4(x+3)^5}$

11.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{\sqrt{9x^2+1}}$

12.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$

$$13. \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x^2+9}-5}{x+4}$$

$$14. \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^2}{2(x^2+1)} - \frac{2x}{(x^2+1)} \right]$$

เสริม กฎของโพลิตาล

เสริม เพื่อความรวดเร็วในการทำโจทย์ลิมิต

กฎของโลปีตาล ใช้ได้เมื่อกรณีแทนค่าลิมิตแล้วได้  $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$  เท่านั้น นอกจากนี้ต้องจัดรูปให้เป็น  $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$  เช่น

$\infty \cdot 0$  จัดรูปเป็น  $\infty \cdot \frac{1}{\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{d}{dx}f(x)}{\frac{d}{dx}g(x)} \text{ เมื่อ } f(a) \text{ และ } g(a) \text{ ระบุเข้า } 0 \text{ หรือ } \infty \text{ พร้อมกัน}$$

ตัวอย่าง

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+\sqrt{x}}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dx}(x+\sqrt{x})}{\frac{d}{dx}(2x+1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2} = \frac{1}{2}$$

ลองใช้กฎของโลปีตาลกับโจทย์ต่อไปนี้

- $$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{(x-9)(x-3)}{x-9}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - x^2 - 17x - 15}{x^3 - x^2 - 16x - 20}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 1}{x^2 - x^3}$$

4.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

5.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x+9}}{x-3}$

6.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{x-1}}$

7.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{\sqrt{9x^2+1}}$

การอินทิเกรตพื้นฐาน

Integration คือการหาพื้นที่ใต้กราฟ

การอินทิเกรตพื้นฐาน โดยให้  $k, C$  แทนค่าคงที่

$$\int k dx = kx + C$$

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \text{ เมื่อ } n \neq -1$$

$$\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$$

$$\int f(x) + g(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

ตัวอย่าง

$$\int 3x^2 + x dx = 3 \int x^2 dx + \int x dx = 3 \cdot \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + C = x^3 + \frac{1}{2} x^2 + C$$

จงอินทิเกรตไม่จำกัดเขตต่อไปนี้

1.  $\int 5 dx$

2.  $\int x dx$

3.  $\int x^3 dx$

4.  $\int \frac{3}{5} x^{\frac{2}{3}} dx$

5.  $\int \sqrt{x} + 3x^2 dx$

6.  $\int \sqrt{x^2} dx$

7.  $\int x^{-\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{3}} + x^{5.2} dx$

8.  $\int (x + 1)(x)dx$

9.  $\int (x + 2)(x^2 + 2x + 4)dx$

การอินทิเกรตด้วยวิธีการแทนค่าตัวแปร

การอินทิเกรตด้วยวิธีการแทนค่าตัวแปร (u-sub)

เป็นการแทนค่าเพื่อจัดรูปให้อยู่ในรูปพื้นฐานซึ่งสามารถอินทิเกรตได้โดยตรงแล้วแทนค่ากลับ

เช่น  $\int (2x + 1)^{10} dx$  ให้  $u = 2x + 1$  จะแทนค่า  $dx$  ให้อยู่ในรูป  $du$  โดยการดิฟ  $u$  เทียบ

$x$  ทั้ง 2 ข้างของสมการ จะได้ว่า  $du = 2dx$

$$\int (2x + 1)^{10} dx = \int (u)^{10} \frac{du}{2} = \frac{u^{11}}{22} + C = \frac{(2x+1)^{11}}{22} + C$$

จงหาค่าของอินทิเกรตไม่จำกัดเขตต่อไปนี้

- $\int (3x + 2)^3 dx$

2.  $\int (2x + 7)^{\frac{1}{2}} dx$

3.  $\int (8x + 6)^{888} dx$

4.  $\int(4x + 3)(2x^2 + 3x + 7)^2 dx$

5.  $\int(3x + 1)^2(3x^3 + 3x^2 + x)^2 dx$

อินทิเกรตแบบจำกัดเขต

อินทิเกรตแบบจำกัดเขต

จากการอินทิเกรตแบบไม่จำกัดเขต ให้  $F(x) = \int f(x)dx$  แล้ว

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

เช่น  $\int_1^5 xdx = \frac{(5)^2}{2} - \frac{(1)^2}{2} = 12$

จงหาอินทิเกรตจำกัดเขตต่อไปนี้

1.  $\int_1^5 dx$

2.  $\int_{-1}^1 x^2 dx$

3.  $\int_{-2}^2 x^2 + x + 1 dx$

4.  $\int_{\frac{1}{5}}^{\frac{3}{5}} (5x + 1)^3 dx$

5.  $\int_0^1 (3x + 1)^{1.5} dx$

6.  $\int_0^1 (x + 4)(x^2 + 8x)^{0.5} dx$

7.  $\int_{-1}^0 (x + 3)(x^2 + 6x + 7)^4 dx$

8.  $\int_{-1}^0 (3x^2 + 6x + 1)(x^3 + 3x^2 + x + 2)^{0.5} dx$

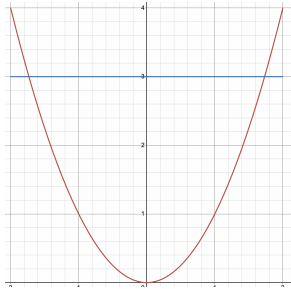
หาพื้นที่ปิดล้อมจากฟังก์ชัน

หาพื้นที่ปิดล้อมจากฟังก์ชัน

ในการอินทิเกรต  $\int_a^b f(x)dx$  เพื่อหาพื้นที่ปิดล้อม จะกำหนดให้  $f(x)$  คือฟังก์ชันที่อธิบายขนาดของพื้นที่นั้น

เมื่อ  $x$  ใดๆ ตั้งแต่  $x = a$  จนถึง  $x = b$

ตัวอย่าง ให้หาพื้นที่ปิดล้อมของ  $y = 3$  และ  $y = x^2$



จากกราฟเห็นได้ว่าพื้นที่ที่เกิดจากการประกอบส่วนพื้นที่เล็กๆ ที่มีความยาว  $3 - x^2$  ตั้งแต่  $x = -\sqrt{3}$  ไปจนถึง  $x = \sqrt{3}$

โดยจะเขียนอินทิเกรตได้ว่า  $Area = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} 3 - x^2 dx$

จงหาพื้นที่ปิดล้อมจากฟังก์ชันต่อไปนี้

1.  $y = x$  และ  $y = 5$  ตั้งแต่  $x = 0$  ถึง  $x = 5$

2.  $y = x^2$  และ  $y = -1$  ตั้งแต่  $x = 0$  ถึง  $x = 2$

3.  $y = |x|$  และ  $y = -1$  ตั้งแต่  $x = -1$  ถึง  $x = 2$

4.  $y = x$  และ  $y = 2$  ตั้งแต่  $x = -2$  ถึง  $x = 8$

5.  $y = x^2$  และ  $y = 1$  ตั้งแต่  $x = -3$  ถึง  $x = 3$

6.  $y = x^2$  และ  $y = x$  ตั้งแต่  $x = 1$  ถึง  $x = 2$

7.  $y = x^2$  และ  $y = x$  ตั้งแต่  $x = 0$  ถึง  $x = 2$

8.  $y = x^2$  และ  $y = x^{\frac{1}{2}}$  ตั้งแต  $x = -2$  ถึง  $x = 2$

9.  $y = x^2$  และ  $y = x^3$  ตั้งแต  $x = -2$  ถึง  $x = 2$

10.  $y = x^2$  และ  $y = \sqrt{x^2}$  ตั้งแต  $x = -2$  ถึง  $x = 2$

11. พื้นที่ปิดของ  $y = 2x^2$  และ  $y = x^4 + 1$

โจทย์ท้าทาย

1.  $f$  เป็นฟังก์ชัน โดยที่  $f'(x) = 2x + 1$  ถ้า  $h(x) = f(x^2 + 2x)$  หาค่าของ  $h'(x)$

2. ให้  $f(x) = -x^2 + k$  เมื่อ  $k$  เป็นจำนวนจริงบวก ถ้าพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง  $y = f(x)$  กับ  $y = 0$  เท่ากับ 36 ตารางหน่วย หาค่าของ  $f(-1) + f(1)$

3. ให้  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนเซตของจำนวนจริง ซึ่ง  $f(0) = 10$ ,  $f(3) = 9$  และ  $f'(x) = x^2 + ax$  เมื่อ  $x < 1$  และ  $f'(x) = x^2 + a$  เมื่อ  $x \geq 1$  จงหาค่าของ  $a$  ที่เป็นจำนวนจริง

4. ให้  $L$  เป็นเส้นตรงซึ่งมีความชันเท่ากับ  $-2$  และสัมผัส  $y = 17 - x^2$  หาขนาดพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยแกน  $X$  แกน  $Y$  และเส้นตรง  $L$

5. ให้  $f(x)$  เป็นฟังก์ชันพหุนาม ถ้า  $f(\sqrt{x} - 1) = x$  เมื่อ  $x > 0$  แล้ว  $f'(1)$  มีค่าเท่ากับเท่าใด

[Hint จัดรูป  $x$  ให้อยู่ในรูป  $\sqrt{x}-1$ ]

6. กำหนดให้  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  เมื่อ  $a, b, c$  เป็นจำนวนจริง ถ้า  $f$  มีค่าวิกฤตที่  $x = -1$  และ  $x = 2$  แล้วพิจารณาค่าต่ำสุด/สูงสุดสัมพัทธ์ ช่วงของฟังก์ชันเพิ่มและลด

7. หาค่าของ  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2|}{x^2+5x-14}$

8. หาค่าของ  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x+2} - \frac{8}{x^2-4} \right)$

9. หาค่าของ  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt{1-x}} \left(1 - \frac{2x^3}{x^2+1}\right)$

10. หาสมาการของเส้นสัมผัส  $y = \frac{6}{x+1}$  ที่จุด (1,3)

[Hint สมการเส้นสัมผัสคือ  $y-y_0=m(x-x_0)$ ]

11. หาสมการเส้นตรงตั้งฉากกับเส้นสัมผัสของ  $y = 2 + x|x - 1|$  ที่จุด  $(0, 2)$

12. ถ้า  $f(x)$  เป็นฟังก์ชันพหุนาม และกราฟของ  $y = f(x)$  ตัดกราฟของ  $y = 3x - 4$  ที่  $x = 2$  และ  $x = 5$  หาค่าของ  $\int_2^5 2xf(x) + (x^2 - 1)f'(x)dx$

[Hint ลองพิจารณาอนุพันธ์ที่ติดให้อยู่ในรูป  $f(5)-f(2)$ ]

13. หาค่าของ  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_1^{n(n+2)/2} x^{-2} dx}{n}$

[Hint ลองพิจารณาใน summation // สูตรที่อาจจะมีประโยชน์: อนุกรม telescopic]

14. กำหนดให้  $g(x)$  เป็นพหุนามที่ทำให้ฟังก์ชัน  $f$  นิยามโดย  $f(x) = g(x)$  เมื่อ  $x \leq 1$  และ  $f(x) = x^3 + 2x$  เมื่อ  $x > 1$  ต่อเนื่องที่  $x = 1$  ถ้า  $(f \circ g)'(1) = 58$  จงหาค่า  $g'(1)$

15. กำหนดให้ฟังก์ชัน  $f(x)$  เป็นปฏิยานุพันธ์ของ  $2x + 5$  และความชันของเส้นโค้ง  $y = g(x)$  ที่จุด  $(x, y)$  ใด ๆ คือ  $3x^2$  ถ้ากราฟของฟังก์ชัน  $f$  และ  $g$  ตัดกันที่จุด  $(1, 2)$  แล้ว  $(\frac{f}{g})'(1)$  เท่ากับเท่าใด

16. ให้  $y = f(x)$  เป็นเส้นโค้งผ่านจุด  $(0, 1)$  และจุด  $(1, 1)$  และเส้นสัมผัสของเส้นโค้งที่จุด  $(x, y)$  ใด ๆ มีความชันเท่ากับ  $ax^2 + bx + c$  เมื่อ  $a, b, c$  เป็นจำนวนจริง ถ้า  $f'(0) = 1$  และ  $f''(1) = 2$  จงหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ  $f(x)$

17.  $a_n = \int_0^1 x^{2n} \sqrt{1-x^2} dx$  เมื่อ  $n = 0, 1, 2, \dots$  หาค่าของ  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$

[Hint ลอง diff  $-\frac{1}{3}x^{2n-1}\sqrt{1-x^2}$ ]

18. ให้  $f(x) = x^3 - 3ax^2 - 3(2a + 1)x + a + 2$  โดย  $a$  เป็นจำนวนจริง เมื่อแทน  $a$  ไปเรื่อยๆ จะได้ค่า  $m$  เป็นค่า  $f(x)$  ที่ต่ำที่สุดในช่วง  $-1 \leq x \leq 1$  ของแต่ละค่า  $a$ , จงหาค่า  $m$  มากที่สุด และ น้อยที่สุดที่เป็นไปได้ และค่า  $a$  ที่ทำให้เกิดค่านั้น

[Hint ลอง แยกแยะค่า  $a$  เมื่อค่า  $m$  อยู่ที่  $x=-1, x=1, -1 < x < 1$  ]