เมทริกซ์

เมทริกซ์ คืออะไร

การนำเสนอข้อมูลโดยใช้ตารางก็คือวิธีหนึ่งในการนำเสนอข้อมูลและจัดการข้อมูล โดยเราจะนำข้อมูลที่อยู่ในรูปตารางมาเขียนให้อยู่ภายใต้วงเล็บ [ ] และเราจะเรียกว่าเมทริกซ์

ตัวอย่าง มีข้อมูล

	คะแนนวิชา1	คะแนนวิชา2	คะแนนวิชา3
A	20	30	40
B	6	9	42
C	1	2	3

สามารถแสดงข้อมูลในรูปแบบเมทริกในรูปแบบ $\begin{bmatrix} 20 & 30 & 40 \\ 6 & 9 & 42 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

ส่วนประกอบของเมทริกซ์

กำหนดเมทริกตัวอย่าง ขนาด หรือ มิติ mxn

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ชุดของสมาชิกที่เขียนในแนวนอน เรียกว่า แถว (row) ของเมทริกซ์ ซึ่งมีทั้งหมด m แถว

ชุดของสมาชิกที่เขียนในแนวตั้ง เรียกว่า หลัก (column) ของเมทริกซ์ ซึ่งมีทั้งหมด n หลัก

เรียก a_{ij} ว่าเป็น สมาชิกในแถวที่ i และหลักที่ j ของเมทริกซ์

จงทำความคุ้นเคยกับการใช้เมทริกด้วยการแก้โจทย์ต่อไปนี้

1. จากเมทริกซ์ $B = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 0 & -5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ จงบอกขนาดของเมทริกซ์ และสมาชิกที่ตำแหน่ง b_{31} คือจำนวนใด

2. จากเมทริกซ์ $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 7 & -3 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ จงบอกขนาดของเมทริกซ์ และอธิบายค่าของสมาชิกทุกตำแหน่ง

3. ถ้า A มีสมาชิก a_{ij} โดยที่ $a_{ij} = 2i + j$ และ A เป็นเมทริกซ์ขนาด 2x3 จงหาเมทริกซ์ A

4. ถ้า A มีสมาชิก a_{ij} โดยที่ $a_{ij} = ij + 5i$ และ A เป็นเมทริกซ์ขนาด 4x2 จงหาเมทริกซ์

การเท่ากันของเมทริกซ์

เมทริกซ์สองเมทริกซ์จะเท่ากันได้ต้องมีมิติเหมือนกัน และข้อมูลทุกตัวในตำแหน่งเดียวกันเท่ากันทุกตำแหน่ง

ตัวอย่างในการใช้

ถ้า A = B โดยที่ A = $\begin{bmatrix} x+1 \\ 5 \end{bmatrix}$ และ B = $\begin{bmatrix} 4 \\ y \end{bmatrix}$ จงหาค่า x และ y

จาก A = B ได้ว่า $a_{11} = b_{11}$ และ $a_{21} = b_{21}$

จาก $a_{11} = b_{11}$ ได้ว่า x=3

จาก $a_{21} = b_{21}$ ได้ว่า y=5

จงใช้การเท่ากันของเมทริกซ์หาค่าต่างๆต่อไปนี้

1. $A = \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ จงหาค่าของ x และ y

2. $A = \begin{bmatrix} x+2y & -1 & x-3z \\ 2 & 0 & y-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 4 \\ y & 0 & 1 \end{bmatrix}$ จงหาค่าของ x, y และ z

3. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y & z \\ w & 3 \end{bmatrix}$ จงหาค่าของ x+z+w+y

4. $\begin{bmatrix} 3 \cdot 5^a & 3b \\ 3 \cdot 2^c & 3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5^a + 4 & 5^a + b + 6 \\ 2^c + d - 1 & 2d + 3 \end{bmatrix}$ จงหาค่าของ b+c

พีชคณิตเชิงเมทริกซ์

การบวกและการลบเมทริกซ์

ให้ A และ B เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาดเท่ากัน จะได้ว่า C = A+B โดยที่ $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ สำหรับทุก $i \in \{1,2,3,\ldots,m\}$ และ $j \in \{1,2,3,\ldots,n\}$

จงบวกลบเมทริกซ์ต่อไปนี้

1. ให้ A = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ และ B = $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ จงหา A + B

2. ให้ A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ และ B = $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ จงหา A – B

3. ให้ A = $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ และ B = $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ จงหา A – B

การคูณเมทริกซ์ด้วยจำนวนจริง

ให้นำจำนวนจริงนั้น คูณสมาชิกทุกตัวในเมทริกซ์

หรือเขียนเป็นนิยามได้ว่า กำหนดให้ B=cA เมื่อ A เป็นเมทริกซ์ และ c เป็นค่าลงที่ โดยที่ $b_{ij} = c \cdot a_{ij}$ สำหรับทุก $i \in \{1,2,3,\ldots,m\}$ และ $j \in \{1,2,3,\ldots,n\}$

จงหาผลคูณเมทริกซ์ด้วยค่าคงที่ต่อไปนี้

1. ให้ B = $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ จงหา 3B

2. ถ้า $A = [3 \quad -1]$ และ $B = [0 \quad 2]$ จงหาค่าของ 2A - 3B

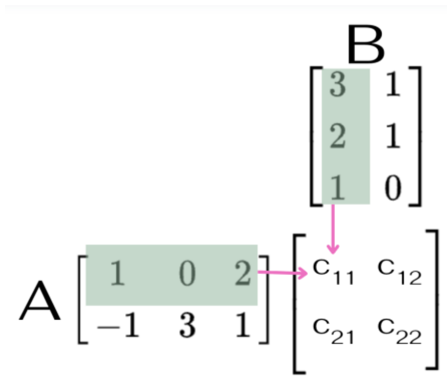
3. ถ้า $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ จงหาค่าของ 3A+2B

การคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์

ให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด mxn และ ให้ B เป็นเมทริกซ์ขนาด pxq

ผลคูณของเมทริกซ์ A และ B เขียนแทนด้วย AB จะนิยามได้ ก็ต่อเมื่อ n=p และเมทริกซ์ผลคูณ AB จะมีขนาด m×q ซึ่งมีสมาชิกในแถวที่ I และหลักที่ j เป็น $a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}$

สำหรับทุก $i \in \{1,2,3, \dots, m\}$ และ $j \in \{1,2,3, \dots, q\}$



จากรูปจะหา C = AB จะได้ c_{11} คือ $1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 5$ ส่วนค่าเมทริกซ์ C ตัวอื่นๆทำในทำนองเดียวกัน

[$\mathrm{AB} \neq \mathrm{BA}$ ไม่มีสมบัติการสลับที่]

จงใช้การคูณเมทริกซ์หาค่าต่อไปนี้

1. จงหา AB เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

2. จงหา AB เมื่อ $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. จงหา AB เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. จงหา AB เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. จงหา AB เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 9 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

6. หา AB เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 3 & 1 \\ 9 & -2 \\ -6 & 9 \end{bmatrix}$

การดำเนินการของเมทริกซ์

เมทริกซ์สลับเปลี่ยน (transpose)

ให้ $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ และ $B = \left[b_{ij}\right]_{n\times m}$ โดยที่ $b_{ij} = a_{ji}$

สำหรับทุก $i \in \{1,2,3,\dots,n\}$ และ $j \in \{1,2,3,\dots,m\}$

เรียก B ว่า เมทริกซ์สลับเปลี่ยน (transpose) ของ A เขียนแทนด้วย A^t

และมีสมบัติของ transpose เมทริกซ์

- $(A^t)^t = A$
- $(cA)^t = c(A^t)$
- $(A + B)^t = (A^t) + (B^t)$
- $(AB)^t = B^t A^t$

จงใช้เมทริกซ์สลับเปลี่ยนหาค่าต่อไปนี้

1. ถ้า $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ จงหา C^t

2. ถ้า $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \end{bmatrix}$ จงหาค่าและมิติของ C^t

3. ถ้า $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ จงหา $(5C)^t$

4. ถ้า $A = \begin{bmatrix} x & 3-x \\ x & 3 \end{bmatrix}$ จงหาค่า x เมื่อ $A + A^t = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

5. ถ้า $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ จงหาเมทริกซ์ B ที่ทำให้ $A = (2B)^t$

ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์

ใช้สัญลักษณ์ $det(A)$ หรือ $|A|$ โดยหาได้เฉพาะเมทริกซ์จัตุรัส หรือเมทริกซ์ที่มีแถวและหลักเป็นจำนวนเท่ากัน

ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ที่มีขนาด 2 x 2

ให้ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ จะได้ ดีเทอร์มิแนนต์ของ A คือ ad–bc

จงใช้การหาค่าของดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ที่มีขนาด 2 x 2 ในการแก้โจทย์ต่อไปนี้

1. หา $det(A)$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

2. หา $det(A)$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

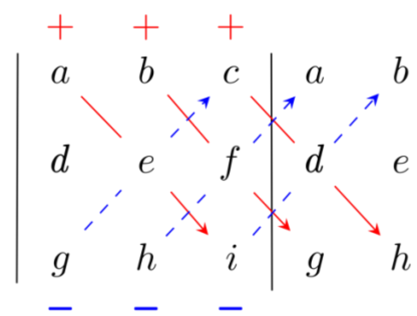
3. จงหา $det(2A)$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

4. จงหา $det(3A^t)$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$

5. ถ้า $A = \begin{bmatrix} x+1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ และ $det(2A) = 24$ จงหาค่า x

ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ที่มีขนาด 3x3

หนึ่งในวิธีที่สามารถทำได้คือใช้ กฎของซาร์รัส โดยการต่อหลักที่ 1 และ 2 ลากเส้นทแยงมุมเพื่อคำนวณผลคูณบวกและลบ



ดีเทอร์มิแนนต์ = (aei + bfg + cdh) – (gec + hfa + idb)

จงใช้การหาค่าของดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ที่มีขนาด 3 x 3 ในการแก้โจทย์ต่อไปนี้

1. หาค่าของ $det(A)$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

2. หาค่าของ $det(A)$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

3. หาค่าของ $det(A)$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ X & 4 & 0 \\ X & X & 3 \end{bmatrix}$ โดย X เป็นค่าอะไรก็ได้ในเซตของจำนวนจริง

4. หาค่าของ $det(A)$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

5. หาค่าของ $det(A)$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

จากการหา det ข้างต้นสามารถใช้หาได้แค่ 2 x 2 และ 3 x 3 เท่านั้น

โดยขนาดใด ๆ สามารถหา det ด้วยการดำเนินการตามแนวเมทริกซ์ (Row Operations) ใช้ได้เพราะคือ การแปลงสมการเชิงเส้นให้อยู่ในรูปแบบที่ง่ายขึ้นเพื่อหาคำตอบ โดยไม่เปลี่ยนแปลงความสัมพันธ์ของสมการเดิม

จากที่เคยทำไปข้างต้น จะเห็นได้ว่ามีสมบัติของ det

โดยเมทริก $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ เรียกว่าเมทริกซ์ทแยงมุม ซึ่งมี det เท่ากับผลคูณของเส้นทแยงมุม

โดยเมทริก $\begin{bmatrix} 2 & X & X \\ 0 & 4 & X \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ เรียกว่าเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน ซึ่งมี det เท่ากับผลคูณของเส้นทแยงมุม

โดยเมทริก $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ X & 4 & 0 \\ X & X & 3 \end{bmatrix}$ เรียกว่าเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง ซึ่งมี det เท่ากับผลคูณของเส้นทแยงมุม

และ เมทริก $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ X & X & X \\ X & X & X \end{bmatrix}$ มี det = 0 หรือจะมองได้จากการที่มี 2 สมการ กับ 3 ตัวแปรจะไม่สามารถหาค่าในค่าคงที่ทั้ง 3 ตัวแปรได้ หรือมีคำตอบเป็นอนันต์ / ไม่มีคำตอบ

โดยจะทำการดำเนินการตามแนวกับเมทริกที่ต้องหารหา det ให้เหลือสามเหลี่ยมบน หรือสามเหลี่ยมล่าง ซึ่งจะมีการดำเนินการดังนี้

1. สลับแถวที่ i กับแถวที่ j (เขียนแทนด้วย $R_i \leftrightarrow R_j$)
2. เปลี่ยนแถวที่ i โดยนำค่าคงตัว c คูณกับแถวที่ j แล้วบวกกับแถวที่ i ($R_i \rightarrow R_i + cR_j$)
3. คูณแถวที่ i ด้วยค่าคงตัว c ($R_i \rightarrow cR_i$)

[หมายเหตุ: ค่า det วิธีที่1 จะติดลบ, วิธีที่ 2 ไม่เปลี่ยนแปลง, วิธีที่ 3 det มีค่าเป็น c เท่าของเดิม]

จงใช้การดำเนินตามแถวในการหาค่า det ต่อไปนี้

1. หาค่าของ $det(A)$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} -9 & -7 & -5 \\ -3 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$

2. หาค่าของ $det(A)$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

3. หาค่าของ $det(A)$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

4. หาค่าของ $det(A)$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 1 \end{bmatrix}$

การหา det ในมิติจัตุรัสใด ๆ มิติ k x k ด้วยโคแฟคเตอร์ด้วยสูตร

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{k} a_{ij}C_{ij}$$

โดย C_{ij} คือโคแฟกเตอร์ในแถวที่ I หลักที่ j และมีสูตรในการหาคือ

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$$

โดย M_{ij} คือการหา Minor ของเมทริกซ์ในแถวที่ I หลักที่ j ซึ่งหาได้จากการหา det หลังจากการลบข้อมูลในแถวที่ I และหลักที่ j ออก

ตัวอย่างการหา det

กำหนดให้ต้องการหา det ของ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

ทำได้โดยการเลือกแถวหรือหลัก 1 แถว [ถ้าเลือกแถวที่มี 0 มากจะคิดเลขง่าย] -> เลือกหลักที่ 3

จากนั้น $\det(A) = a_{13}C_{13} + a_{23}C_{23} + a_{33}C_{33} = 1 \times C_{13} + 0 \times C_{23} + 1 \times C_{33}$

พิจารณาหา C_{13} ได้จาก $(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$

พิจารณาหา C_{33} ได้จาก $(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$\det(A) = C_{13} + C_{33} = -3 + 1 = -2$

จงใช้ความรู้เรื่อง Minor, Cofactor และ det ในการหาค่าต่อไปนี้

1. หาค่าของ $det(A)$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

2. หาค่าของ x^2 เมื่อ $A = \begin{bmatrix} x & 2 & x \\ 1 & x & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ และ $det(A) = 16$

3. ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ หาค่าของ $\mathrm{a}_{11}\mathrm{C}_{11} + \mathrm{a}_{12}\mathrm{C}_{12}$

4. ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ หาค่าของ $\mathrm{C}_{11} + \mathrm{C}_{22}\mathrm{M}_{33}$

5. ให้ $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ หาค่าของ $\mathrm{a}_{13}\mathrm{C}_{13} + \mathrm{a}_{23}\mathrm{C}_{23} + \mathrm{a}_{33}\mathrm{C}_{33}$

เมทริกซ์ผูกพัน (adjoint metrix)

คือ ทรานสโพสของเมทริกซ์โคแฟกเตอร์ เขียนได้ในรูป $adj(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}^t$

สมบัติของแอดจอยต์ $A(adj(A)) = (adj(A))A = det(A)(I)$

จงหาค่า $adj(A)$ จากเมทริกซ์ A ต่อไปนี้

1. จงหาค่า $adj(A)$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

2. จงหาค่า $adj(A)$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

3. จงหาค่า $adj(A)$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}$

4. จงหาค่า $adj(A)$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

5. จงหาค่า $adj(A)$ และ $A\left(adj(A)\right)$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

6. จงหาค่า $det(adj(A))$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

อินเวอร์สการคูณสเมทริกซ์ ของเมทริกซ์มิติ n x n

หาได้จาก $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(adj(A))$

โดยจะไม่มีอินเวอร์สเมื่อ $|A| = 0$

จงใช้การหาอินเวอร์สในการแก้โจทย์ต่อไปนี้

1. จงหาค่า A^{-1} เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$

2. จงหาค่า A^{-1} เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

3. จงหาค่า A^{-1} เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

4. จงหาค่า A^{-1} เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

5. จงหาค่า A^{-1} และ $det(A^{-1})$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

6. ให้ $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ และ $A^{-1}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ จงหา a+b+c

สมบัติของ det ที่ควรรู้

- $det(A^t) = det(A)$
- $det(AB) = det(A)det(B)$
- $det(A^n) = det(A)^n$
- $det(A^{-1}) = det(A)^{-1}$
- $det(cA) = c^n det(A)$ เมื่อ n เป็นมิติของเมทริกซ์ nxn
- $det(adj(A)) = det(A)^{n-1}$
- $det(adj(adj(A))) = det(A)^{(n-1)^2}$

จงใช้สมบัติของ det ในการหาค่าต่อไปนี้

1. ถ้า A เป็นเมทริกซ์ 2 x 2 และ det(A) = 3 จงหา $det(A^t)$

2. ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์ 2 x 2 และ det(A) = 3, det(B) = 4 จงหา det(AB)

3. ถ้า A เป็นเมทริกซ์ 2 x 2 และ det(A) = 5 จงหา $det(5A^{-1})$

4. ถ้า A เป็นเมทริกซ์ 2 x 2 และ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ จงหา det(adj(A))

5. ถ้า A เป็นเมทริกซ์ 2 x 2 และ $det(A^3) = 8$ จงหา det(A)

6. ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์ 2 x 2 และ det(A) = 6, $det(B^{-1}) = \frac{1}{3}$ จงหา det(AB)

7. ถ้า A เป็นเมทริกซ์ที่ทำให้ det(A) = 0 จงหา $det(A^{-1})$

8. ถ้า A เป็นเมทริกซ์ 2 x 2 และ det(A) = 5 จงหา $det((2A)^{-1})$

9. ถ้า A เป็นเมทริกซ์ 3 x 3 และ det(A) = x จงหา det(xA)

10. ถ้า A เป็นเมทริกซ์ 2 x 2 และ det(adj(A)) = 9 จงหา $det(A^2)$

11. ถ้า A เป็นเมทริกซ์ 3 x 3 และ det(A) = 3 จงหา $det(A^2 + A^2)$

12. ถ้า A เป็นเมทริกซ์ 3 x 3 และ det(adj(A)) = 49 จงหา $det((A^{-1})^t)$

13. ถ้า A เป็นเมทริกซ์ 3 x 3 และ det(A) = 1/2 จงหา det(adj(adj(2A)))

14. ถ้า A เป็นเมทริกซ์ 4 x 4 และ det(A) = 3 จงหา $det(adj(A^{-1}))^{-1}$

แก้สมการเมทริกซ์

วิธีแก้สมการ

ทำเหมือนตอนแก้สมการแบบเก่า คือใช้วิธีดำเนินการด้วยอินเวอร์สทั้ง 2 ข้าง ให้เหลือ X แยกอยู่ตัวเดียว เนื่องจากเมทริกซ์สลับที่การคูณไม่ได้ดังนั้น ถ้าย้ายจากคูณซ้าย ก็ต้องไปคูณซ้าย ถ้าย้ายจากคูณขวา ก็ต้องไปคูณขวา และห้ามย้ายเมทริกซ์ที่คูณอยู่ตรงกลาง

ตัวอย่าง

$$AXB - C = D$$
$$AXB = C + D$$
$$X = A^{-1}(C + D)B^{-1}$$

จงแก้ระบบสมการเพื่อหาเมทริกซ์ที่ไม่ทราบค่าต่อไปนี้

1. $\begin{cases} 2A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \\ 3A - B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 7 & -6 \end{bmatrix} \end{cases}$

2. หา X ที่สอดคล้องกับสมการ $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + 4X = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

3. ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix}$ ถ้า $A^{-1}BA = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ แล้วจงหาค่าของ xyz

4. จงหาค่า X จากสมการ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 & 13 \\ 17 & 19 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$

เมทริกซ์แต่งเติม

อีกเทคนิคในการแก้สมการ AX = B โดยใช้เมทริกซ์แต่งเติม ซึ่งมีขั้นตอนดังนี้นำสมการเมทริกซ์ AX = B มาสร้างเมทริกซ์แต่งเติม ซึ่งมีรูปแบบคือ [A | B]

เช่น แก้สมการ $\begin{cases} -2x+4y=4 \\ x+3y=8 \end{cases}$

จะแปลงเป็นสมการเมทริกซ์ได้เป็น $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}$ และสร้างเมทริกซ์แต่งเติมได้เป็น

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 & |4 \\ 1 & 3 & |8 \end{bmatrix}$$

และจะเปลี่ยนส่วนซ้ายในรูปเมทริกซ์ I โดยการดำเนินการตามแถว และได้คำตอบคือด้านขวา

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 & |4 \\ 1 & 3 & |8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & |-2 \\ 1 & 3 & |8 \end{bmatrix} \; R_1 \to \frac{R_1}{-2}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & |-2 \\ 0 & 5 & |10 \end{bmatrix} \; R_2 \to R_2 - R_1$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & |-2 \\ 0 & 1 & |2 \end{bmatrix} \; R_2 \to \frac{R_2}{5}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & |2 \\ 0 & 1 & |2 \end{bmatrix} \; R_1 \to R_1 + 2R_2$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

จงใช้เมทริกซ์แต่งเติมในการหาค่าต่อไปนี้

1. $X\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 7 & -8 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 4 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ -6 \end{bmatrix}$

5. ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ และ X เป็นเมทริกซ์ที่สอดคล้องกับ $AX = C$ จงหา $(2A + B)X$

โจทย์เพิ่มเติม

1. ให้ $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 3c_1 & 3c_2 & 3c_3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3b_1 & 3b_2 & 3b_3 \end{bmatrix}$

พิจารณาข้อความนี้ว่าข้อไหนเป็นจริงบ้าง

- $det(B) = 3det(A)$
- $det(AC) = 0$
- $det(A + C) = det(A) + det(C)$

2. ให้ A เป็นเมทริกซ์ 3 x 3 ซึ่ง det(A) = 10 และ B เป็นเมทริกซ์ที่ได้จากการสลับแถวที่ 1 และ แถวที่ 3 ของ A แล้ว $det(\frac{B}{5})$ มีค่าเท่าใด

3. ให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ แล้ว $det(A(B^{-1})^t)$

4. ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ และ C เป็นเมทริก 2×2 ที่สอดคล้องกับ $CA = AB$ ถ้า x เป็นจำนวนจริงบวกที่สอดคล้องกับ $det(C^2 + xB) = -20$ จงหาค่าของ $x^2 + x + 1$

5. กำหนดระบบสมการ $AX = B$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} a & 2 & 1 \\ b & 0 & -1 \\ c & 2 & -2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$

ถ้า $\begin{bmatrix} a & 2 & 1: & 3 \\ b & 0 & -1: & 3 \\ c & 2 & -2: & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1: & 3 \\ 0 & 1 & 0: & -3 \\ 0 & 0 & 1: & 5 \end{bmatrix}$ จงหาค่า $det(A)$

6. กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์มิติ 3×3 ซึ่ง $[\mathrm{A} \mid \mathrm{I}] \sim \left[\mathrm{I} \,\middle\|\, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right]$ โดยที่ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ในมิติ 3×3 จงหาค่าของ $A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

7. ให้ $A = \begin{bmatrix} a & 1 - a \\ 1 + a & -a \end{bmatrix}$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริง และ $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ แล้วจงหาค่าของ $det((A - \sqrt{2}I)(A - \sqrt{3}I)(A - \sqrt{5}I)(A - \sqrt{7}I))$

8. ให้ $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง จงหาจำนวนของ A ที่เป็นไปได้เมื่อ $(A^t - I)(A^t - 2I) = 0_{2\times2}$

9. ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ a & b \end{bmatrix}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง ถ้า $(A - B)B = B(A - B)$ จงหาค่าของ $det(A + B)$

10. ให้ A เป็นเมทริกซ์ 3×3 โดยที่ $det(A) = \frac{1}{4}$ และ $B = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ a & 0 & b \end{bmatrix}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง ถ้า $2AB + 3I = A$ เมื่อ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ในมิติ 3×3 จงหาค่าของ a+b

11. ให้ $A = \begin{bmatrix} 2x & 1 \\ x & x \end{bmatrix}$ เมื่อ x และ b เป็นจำนวนจริง และ $2det(A) = 6$ ให้ B เป็นเมทริกซ์ 2×2 โดยที่ $BA^{-1} + BA = 2I$ เมื่อ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ในมิติ 2×2 จงหาค่าของ $det(B)$

12. ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 4 \end{bmatrix}$ และ $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงที่ $ab \neq 0$ และเมทริกซ์ A สอดคล้องกับ $2(A - I)^{-1} = 4I - A$ จงหาค่าของ $det(adj(A)A^{-1}A^{t}A^{2}) + ab$