

จำนวนจริง

พหุนามตัวแปรเดียว

บวก/ลบพหุนาม

ทำพหุนามต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

1. $x + x$

2. $x^2 + x^2$

3. $x^2 + x + x$

4. $x^2 + 1 + x + 2 + 2x$

5. $x^3 + 1 + x + 2 - 2x - 3x^3 + 7x^2 - 5x^2 + 10x$

6. $2x^3 + 15 + 3x - 12 - 5x - x^3 + 7x^2 - 5x^2 + x$

คุณพุดผาม

จงกระจายพหุนามต่อไปนี้และทำให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

1. $x(x + 1)$

2. $(x + 3)x^2$

3. $(x + 1)(x + 2)$

4. $(x - 1)(x + 4)$

5. $(x + 1)(x + 1)$

6. $(x + 4)(x + 4)$

7. $(x + 2)(x - 2)$

8. $(x + 5)(x - 5)$

9. $(x - 2)(x + 3)(x - 1)$

10. $(x + 1)(x + 3)(x + 5)$

11. $(x - 1)(x^2 + 2x + 2)$

12. $(x + 1)(x + 2)(x - 1)(x - 2)$

หารพหุนาม

การหาทั้งผลหารและเศษโดยปกติจะตั้งหารคล้ายหารเลขปกติ โดยเศษจะมีดีกรีน้อยกว่าตัวหาร

ทฤษฎีตัวประกอบ ตัวตั้ง = (ตัวหาร $\times$ ผลหาร) + เศษ หรือคือการจำนวนคละเป็นเศษเกินแบบที่เคยรู้จัก

จงจัดรูปให้อยู่ในรูป ผลหาร + (เศษ/ตัวหาร)

1. $\frac{x+1}{x}$

2. $\frac{x}{x+2}$

3. $\frac{2x}{x+1}$

4. $\frac{5x}{x+2}$

5. $\frac{2x^2}{x+1}$

6. $\frac{2x^2+3x}{x+1}$

$$7. \frac{2x^3+3x^2+4x}{x^2+3x+2}$$

$$8. \frac{3x^3+5x^2+7x-9}{(x+1)(x+2)}$$

$$9. \frac{-x^3+x-1}{(x-1)(x+2)}$$

ทฤษฎีที่อาจจะมีประโยชน์สำหรับการหาเฉพาะเศษจากการหารด้วยพหุนามดีกรี 1

ทฤษฎีบทเศษเหลือ

มีพหุนาม $P(x)$ หารด้วย $x - a$ จะได้เศษคือ $P(a)$

หาเศษจากการหารต่อไปนี้

1. $5x + 2$ หารด้วย x

2. $10x + 6$ หารด้วย $x + 3$

3. $x^2 + 3x + 7$ หารด้วย $x + 2$

4. $x^{888} - 2x^{666}$ หารด้วย $x - 1$

5. $10x + 6$ หารด้วย $2x + 1$

6. $x^2 + 9x + 14$ หารด้วย $2x + 14$

แยกตัวประกอบสมการดีกรี 2 : $ax^2 + bx + c$

สมมติให้ $a_1 \cdot a_2 = a$ และ $c_1 \cdot c_2 = c$ แล้วมี $a_1 \cdot c_2 + a_2 \cdot c_1 = b$

จะได้ว่า $ax^2 + bx + c = (a_1x - c_1)(a_2x - c_2)$ และได้คำตอบคือ $\frac{c_1}{a_1}$ และ $\frac{c_2}{a_2}$

หรือใช้สูตรหาค่า $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

โดยในกรณีที่ $b^2 - 4ac > 0$ จะมีคำตอบ x 2 คำตอบ

$b^2 - 4ac = 0$ จะมีคำตอบ x 1 คำตอบ จากรากซ้ำ $-b \pm 0$

$b^2 - 4ac < 0$ จะไม่มีคำตอบ x ที่เป็นจำนวนจริง

จงแยกตัวประกอบต่อไปนี้

1. $x^2 + 2x + 1$

2. $x^2 - 4x + 4$

3. $x^2 - 16$

4. $x^2 + 2x - 3$

5. $x^2 - 5x - 14$

6. $x^2 - 9x + 14$

7. $2x^2 + 9x - 5$

8. $-15x^2 + 2x + 1$

การหาตัวประกอบที่เป็นตรรกยะของพหุนามดีกรีใดๆ

ให้ต้องการหารากของพหุนาม $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ถ้ามีรากเป็นตรรกยะ จะ

เขียนค่าของรากได้เป็น $\frac{\pm \text{ตัวประกอบของ } a_0}{\pm \text{ตัวประกอบของ } a_n}$ จึงลองแทนค่ารากที่น่าจะเป็นรากด้วยทฤษฎีบทเศษเหลือ

จงหารากตรรกยะของพหุนามต่อไปนี้

1. $5x^2 + 8x - 13$

2. $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

3. $x^3 + 3x^2 - 3x - 5$

4. $x^3 + 9x^2 - 12x - 20$

5. $6x^3 - 11x^2 - 5x + 12$

6. $x^5 - 9x^4 + 3x^3 + 73x^2 + 96x + 36$

สูตรการแยกตัวประกอบที่ควรรู้

[ส่วน y เป็นลบสามารถทำได้โดยการแทน y เป็น $-y$]

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

จงทำให้เป็นรูปพจน์ดีกรีน้อยๆคุณกัน โดยทดลองใช้สูตรข้างต้น

1. $x^2 + 20x + 100$

2. $a^2x^2 + 4axb + 4b^2$

3. $x^2 - 18x + 81$

4. $4x^2 - 25$

5. $8x^3 + 27$

6. $(x^2 - 4x + 4) - (9x^2 - 24x + 16)$

7. $(x^3 + 2y^3)^2 - (x^3 - 2y^3)^2 + x^6$

การแก้สมการตัวแปรเดียว

จัดรูปพจน์เป็นดีกรีย่อยๆจนจนแล้วแก้สมการแต่ละพจน์

เช่น $a_1 a_2 a_3 = 0$ จะได้ว่า $a_1 = 0$ หรือ $a_2 = 0$ หรือ $a_3 = 0$ แล้วหาคำตอบแต่ละสมการย่อย

จงแก้สมการต่อไปนี้

1. $x^2 - 6x + 8 = 0$

2. $x^2 - x - 1 = 0$

3. $5x^2 - 6x - 7 = 0$

4. $(x^2 - 4x - 6)(5x^2 - 2x + 3) = 0$

5. $(64x^3 - 27)(x^2 + 10x + 25.01) = 0$

อสมการ

จงวาดเส้นจำนวนเพื่อหาเซตคำตอบ

1. $x \geq 5$

2. $x < -1$

3. $7 \geq x$

4. $x < 6$ และ $x \geq -2$

5. $3 < x$ และ $1 \geq x$

6. $x < 2$ และ $x \geq 5$ และ $x \geq 3$

จงหาเซตคำตอบของสมการที่กำหนด

[ข้อควรรู้ เมื่อคูณหรือหารสมการด้วยค่าลบ เครื่องหมายจะกลับข้างด้วย]

[ข้อควรระวัง สมการจะยกกำลัง 2 ทั้ง 2 ข้างต้องมั่นใจว่ามีเครื่องหมายเดียวกันแน่ๆ]

[hint สำหรับผู้ไม่ชินสมการเศษส่วน -> ส่วนติด x สามารถคูณ x^2 ทั้ง 2 ข้างเพื่อ ensure ว่าเป็นค่าบวกแน่ๆ]

1. $7 \geq x + 1$

2. $-2x + 8 \geq 6$

3. $1 < 2x + 1 < 5$

4. $2x \geq 6 > x + 3$

5. $-3x \geq 4 > x^2$

6. $x^2 - 2x - 3 > 0$

7. $x^2 < -2x + 8$

8. $-x^2 - 7x - 12 < 0$

9. $\frac{1}{x} > 2$

$$10. \frac{-x}{x+1} > -2$$

$$11. \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)^2} > 0$$

$$12. \frac{-x}{x+1} > \frac{x-2}{x+3}$$

$$13. \frac{(x+1)^3(x+2)^5(x+3)^2+1}{(x+1)^3(x+2)^5(x+3)^2} > 1$$

ค่าสัมบูรณ์

ค่าสัมบูรณ์

ระยะห่างระหว่างตัวเลขกับศูนย์บนเส้นจำนวน ซึ่งเป็นค่าที่ไม่เป็นลบเสมอ

โดยจะนิยามค่า $|x|$ คือค่าสัมบูรณ์ของ x โดยมีค่าเท่ากับ x เมื่อ $x \geq 0$ และเท่ากับ $-x$ เมื่อ $x < 0$

[ข้อควรระวังที่อาจสับสน $\sqrt{x^2} = |x|$ และ $|x|^2 = x^2$ แต่ $\sqrt{x^2} = x$]

จงวาดกราฟ โดยให้ $f(x)$ เป็นค่าต่อไปนี้

1. $|-4|$

2. $|x + 1|$

3. $|2x - 1|$

4. $|x^2|$

5. $|x^3 - 1|$

6. $\sqrt{x^2}$

7. $\sqrt{|x|}^3$

8. $\left| \sqrt{x^4} - 1 \right|$

9. $\left| x^2 - 5x + 6 \right|$

แก้สมการค่าสัมบูรณ์

จงแก้สมการต่อไปนี้

[Hint สามารถแยกเป็น case by case แล้วอย่าลืมไปเช็คคำตอบกับเงื่อนไข case ใหม่]

1. $|x + 1| = 4$

2. $|x - 1| + 2 = 4$

3. $|2x - 3| - 3 = 2$

4. $|x - 1| + |x + 1| = 2$

5. $2|x - 1| + |x^2 - 1| = 5$

6. $|2x - 1| - |x^2 - 4| > 0$

$$7. -|x + 1| + |x^2 - 1| < 10$$

$$8. |2x^2 + 1| - |-x^2 + 2x - 1| \leq 15$$

$$9. 6|x - 3| < 5x$$

$$10. \frac{|2-x|}{|x+3|} < 3$$

$$11. |x^2 + x| < 12$$

$$12. |x^2 - 2|x|| = x^2 - 3x + 2$$

แก้สมการแนวติตราก

แก้สมการที่มีรากติด

Key: ย้ายข้างพยายามให้เหลือรากเดียวๆ แล้วยกกำลังเพื่อกำจัดรากออก

จงหาเซตคำตอบต่อไปนี้

1. $\sqrt{x} = 5$

2. $\sqrt{x - 2} = 3$

3. $\sqrt{x + 1} + \sqrt{x + 3} = 4$

$$4. \sqrt{14 + 3x - x^2} - \sqrt{9 + 5x - x^2} = 1$$

$$5. \sqrt{x^2 - 3x + 4} > -x^2 + 3x + 2$$

6. $\sqrt{x+2} < \sqrt{3-x} + \sqrt{2x-1}$

7. $\sqrt{3x-5} + \sqrt{4x+3} = \sqrt{2x-3} + \sqrt{5x+1}$

โจทย์แนว True/False Pat1/สามัญไทย

1. ตอบจำนวนข้อความที่ถูกต้อง โดยให้ $x - 1$ หาร $P(x)$ เหลือเศษ -1
- A. $x - 1$ หาร $- P(x)$ เหลือเศษ $- 1$
 - B. $x - 1$ หาร $P^2(x)$ เหลือเศษ 1
 - C. $x + 1$ หาร $P(- x)$ เหลือเศษ 1
 - D. $x + 1$ หาร $- P^3(- x)$ เหลือเศษ 1

2. เรียงลำดับ a, b, c, d จากน้อยไปมากเมื่อให้ $\frac{1}{a+50} = \frac{1}{b-51} = \frac{1}{c+52} = \frac{1}{d-53}$

3. ให้ a, b, c, n, m เป็นจำนวนเต็มบวก โดย $1 < a < b \leq c$ และ $am = bn = c$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าถูกหรือผิดบ้าง

A. $\frac{a}{m} < \frac{c}{n}$

B. $bm < c$

C. $n + mn < c + mc$

4. กำหนดให้ $a \oplus b = 1 + ab$ สำหรับ a และ b เป็นจำนวนเต็มใดๆ พิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าถูกหรือผิดบ้าง

A. $a \oplus (1 \oplus a) = (a \oplus 1) \oplus a$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม a ใดๆ

B. $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม a, b, c ใดๆ

C. $((1 \oplus 2) \oplus 3) \oplus 4$ เป็นจำนวนเฉพาะ

5. ให้ a, b, c, d เป็นจำนวนจริง พิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าถูกหรือผิดบ้าง

A. ถ้า $a > b$ และ $c > d$ แล้ว $ac > bd$

B. ถ้า $a < b < c < 0$ แล้ว $|a - c| < |b - c|$

C. ถ้า $0 < a < b$ และ $0 < c < d$ แล้ว $a^c < b^d$

6. ให้ a, b เป็นจำนวนเต็ม ที่สอดคล้องกับ $a^2 + b^2 + 9 = 2(2a - b + 2)$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

A. $a < b$

B. $(2a - b)^n = (a + 3b^2)^n$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

7. ให้ a, b, c, d, x เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ พิจารณาข้อความต่อไปนี้ True/False บ้าง

A. ถ้า $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ แล้ว $\frac{a+x}{b} < \frac{c+x}{d}$

B. $\frac{a}{b} < \frac{a+x}{b+x}$

8. ให้ a, b, c, d เป็นจำนวนจริงบวก โดยที่ $ab = 24$ และ $cd = 8$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

A. ถ้า $d > b$ แล้ว $\frac{\sqrt{a}}{(c+1)^b} < \frac{\sqrt{c}}{(a+1)^d}$

B. ถ้า $a < c$ แล้ว $(0.01)^b < (0.05)^d$

9. ให้ a, b, c, d เป็นจำนวนจริงบวก โดย $b = c + d$, $d = a + c - b$ และ $a = 2c - b$ จงเรียงค่าจากน้อยไปมาก

10. ให้ $A = \sqrt{7\sqrt[3]{5}}$, $B = \sqrt{5\sqrt[3]{7}}$, $C = \sqrt[3]{5\sqrt{7}}$, $D = \sqrt[3]{7\sqrt{5}}$ จงเรียงค่าจากน้อยไป
มาก

โจทย์แก้สมการ อสมการเพิ่มเติม

1. ให้ $ax^5 + bx + 4$ หารด้วย $(x - 1)^2$ ลงตัว หาค่า $a - b$

2. หาเซตคำตอบของ $2x^2 - 2x + 9 - 2\sqrt{x^2 - x + 3} = 15$

3. หาเซตคำตอบของ $\frac{|1-x|-2}{x+|x|-3} > 1$

4. หาเซตคำตอบของ

$$\sqrt{3x + 2} + 2\sqrt{3x + 1} + \sqrt{3x + 10} + 6\sqrt{3x + 1} = 14$$

5. หาเซตคำตอบของ $x^3 + (1 - \sqrt{3})x^2 - (36 + \sqrt{3})x - 36 = 0$

6. ให้ a เป็นจำนวนเต็มลบที่มากที่สุดที่ทำให้ $a^2x^2 + 9x + 1 = 0$ ไม่มีคำตอบที่เป็นจำนวนจริง และ b เป็นจำนวนจริงที่เป็นคำตอบของ $(a^2x^2 + 9x + 1)(2x - b) = 0$ แล้ว $a + b$ เท่ากับเท่าใด

7. ให้ a เป็นจำนวนเต็มบวก และ b, c เป็นจำนวนจริง ถ้า $a, \frac{1}{a}, b$ เป็นรากของสมการ $5x^3 - 86x^2 + cx - 60 = 0$ แล้ว $c - a - b$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

8. ถ้า $x^2 - 4x + 5$ เป็นตัวประกอบของ $x^3 + ax^2 + bx + 30$ โดยที่ a และ b เป็นจำนวนจริง แล้ว $a + b$ เท่ากับเท่าใด

9. หาเซตคำตอบของ $x|x| < -|5x - 14|$

10. กำหนดให้ $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้า $x + 2$ หาร $P(x)$ เหลือเศษ 2 และสมการ $P(x) = 0$ มีคำตอบเป็นจำนวนตรรกยะอย่างน้อยหนึ่งตัว แล้ว $a + b$ เท่ากับเท่าใด

11. กำหนดให้ $P(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนจริง ถ้า $x + 1, x + 2$ และ $x + 3$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$ หาค่า $a + b + c$

12. หาจำนวนของจำนวนเต็ม x ที่ทำให้ $||100 + x| - |100 - x|| < 100$

13. กำหนดให้ $P(x)$ เป็นพหุนามดีกรี 3 ถ้า $x - 1, x - 2$ และ $x - 3$ ต่างก็หาร $P(x)$ แล้วเหลือเศษ 1 และ $x - 4$ หาร $P(x)$ ลงตัว แล้ว $P(5)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้