

สรุปสูตร

หัวข้อ	สูตร
สมบัติเลขยกกำลัง	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, (a^m)^n = a^{mn}, a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
รากที่ n เมื่อ n เป็นจำนวนคู่	$\sqrt[n]{a^n} = a $
ถอดรากซ้อน ($x \geq y \geq 0$)	$\sqrt{x + y \pm 2\sqrt{xy}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$
เลขชี้กำลังตรรกยะ ($a > 0$)	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$
ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล	$f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1, D_f = \mathbb{R}, R_f = (0, \infty)$
การเลื่อนกราฟ	$y = a^{x-h} + k, R = (k, \infty)$
เปรียบเทียบค่าและอสมการ	$a > 1: a^u < a^v \Leftrightarrow u < v \quad 0 < a < 1: a^u < a^v \Leftrightarrow u > v$
นิยามลอการิทึม	$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$
ผลคูณและเลขชี้กำลัง	$\log_a MN = \log_a M + \log_a N, \log_a M^p = p \log_a M$
การเปลี่ยนฐาน	$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$
แคแรกเทอริสติก	$\log(m \times 10^n) = n + \log m, 1 \leq m < 10$
สมการเอกซ์โพเนนเชียล	$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \quad a^x = b \Leftrightarrow x = \frac{\log b}{\log a}$
สมการลอการิทึม	$\log_a f(x) = c \Leftrightarrow f(x) = a^c, f(x) > 0$
อสมการลอการิทึม ($a > 1$)	$\log_a u < \log_a v \Leftrightarrow 0 < u < v$
อสมการลอการิทึม ($0 < a < 1$)	$\log_a u < \log_a v \Leftrightarrow u > v > 0$
การเติบโตและการสลายตัว	$A(t) = A_0 a^{\frac{t}{T}}$
ดอกเบี้ยทบต้น	$A = P \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$
ความเป็นกรด-เบส	$pH = -\log[H^+]$
ความดังของเสียง	$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0}$

เลขยกกำลังและรากที่ n

เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม

ถ้า a เป็นจำนวนจริงและ n เป็นจำนวนเต็มบวก เลขยกกำลัง a^n คือผลคูณของ a จำนวน n ตัว เรียก a ว่า ฐาน และเรียก n ว่า เลขชี้กำลัง ส่วนเลขชี้กำลังที่เป็นศูนย์หรือจำนวนเต็มลบนิยามดังนี้

$$a^0 = 1 \text{ และ } a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ เมื่อ } a \neq 0 \text{ (ส่วน } 0^0 \text{ ไม่นิยาม)}$$

$$\text{เมื่อ } a, b \neq 0 \text{ และ } m, n \text{ เป็นจำนวนเต็ม: } a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, (a^m)^n = a^{mn}$$

$$(ab)^n = a^n b^n, \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \text{ และ } \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

ข้อควรระวัง $-2^4 = -16$ แต่ $(-2)^4 = 16$ และ $(a+b)^n \neq a^n + b^n$ ถ้าฐานต่างกัน ให้แยกเป็นฐานเฉพาะก่อน เช่น $12^n = 2^{2n} \cdot 3^n$ หรือเปลี่ยน 4,8,16 เป็น $2^2, 2^3, 2^4$

ตัวอย่าง

จงทำให้ $\frac{2^{n+3}-2^{n+1}}{4^n \cdot 2^{1-n}}$ อยู่ในรูปอย่างง่าย เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

วิธีทำ ดึงตัวร่วม 2^{n+1} ออกจากตัวเศษ และเปลี่ยน $4^n = 2^{2n}$ ในตัวส่วน

$$\frac{2^{n+1}(2^2 - 1)}{2^{2n} \cdot 2^{1-n}} = \frac{3 \cdot 2^{n+1}}{2^{n+1}}$$

ดังนั้นนิพจน์นี้มีค่าเท่ากับ 3 ไม่ว่า n จะเป็นจำนวนเต็มใด

โจทย์

1. จงหาค่าของ $3^{-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} - (-4)^0$
- เฉลย $3^{-2} = \frac{1}{9}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3 = 8$ และ $(-4)^0 = 1$ ดังนั้นได้ $\frac{1}{9} + 8 - 1 = \frac{64}{9}$

3. จงหาค่าของ $\frac{8^3 \cdot 4^{-2}}{16^{-1} \cdot 32}$
- เฉลย เขียนทุกจำนวนเป็นฐาน 2 ได้ $\frac{2^9 \cdot 2^{-4}}{2^{-4} \cdot 2^5} = \frac{2^5}{2^1} = 2^4$ ดังนั้นได้ 16

2. จงเขียน $\frac{(a^2 b^{-3})^3}{a^{-1} b^2}$ ให้อยู่ในรูปที่เลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวก เมื่อ $a, b \neq 0$
- เฉลย $(a^2 b^{-3})^3 = a^6 b^{-9}$ เมื่อหารด้วย $a^{-1} b^2$ จะได้ $a^{6+1} b^{-9-2} = a^7 b^{-11}$ ดังนั้นได้ $\frac{a^7}{b^{11}}$

4. จงหาค่าของ $\frac{12^3 \cdot 18^{-2}}{6^{-1}}$
- เฉลย แยกตัวประกอบ $12^3 = 2^6 \cdot 3^3$, $18^{-2} = 2^{-2} \cdot 3^{-4}$ และ $6^{-1} = 2^{-1} \cdot 3^{-1}$ จะได้ $2^{6-2+1} \cdot 3^{3-4+1} = 2^5 \cdot 3^0$ ดังนั้นได้ 32

5. ให้ n เป็นจำนวนเต็ม จงทำให้ $\frac{2^{n+2} \cdot 3^n - 6^n}{6^{n-1}}$ อยู่ในรูปอย่างง่าย

เฉลย $2^{n+2} \cdot 3^n = 4 \cdot 2^n \cdot 3^n = 4 \cdot 6^n$ ตัวเศษจึงเป็น $4 \cdot 6^n - 6^n = 3 \cdot 6^n$ ได้ $\frac{3 \cdot 6^n}{6^{n-1}} = 3 \cdot 6$ ดังนั้นได้ 18

7. จำนวน $8^5 \cdot 25^6 \cdot 3$ เมื่อเขียนในระบบฐานสิบมีกี่หลัก และผลบวกของเลขโดดทุกหลักเท่ากับเท่าใด

เฉลย $8^5 \cdot 25^6 \cdot 3 = 2^{15} \cdot 5^{12} \cdot 3 = 2^3 \cdot 3 \cdot (2 \cdot 5)^{12} = 24 \cdot 10^{12}$ คือ 24 ตามด้วยศูนย์ 12 ตัว ดังนั้นมี 14 หลัก และผลบวกของเลขโดดเท่ากับ $2 + 4 = 6$

9. จงหาจำนวนเต็ม n ที่ทำให้ $\frac{(-2)^n \cdot 4^3}{8^{n-1}} = -\frac{1}{2}$

เฉลย ค่าสัมบูรณ์ของตัวเศษคือ $2^n \cdot 2^6$ และ $8^{n-1} = 2^{3n-3}$ จึงได้ $2^{9-2n} = 2^{-1}$ หรือ $n = 5$ ซึ่งเป็นจำนวนคี่ ทำให้ $(-2)^5 < 0$ ตรงกับเครื่องหมายลบ ดังนั้น $n = 5$

6. จงเรียงจำนวน $A = 2^{-100}$, $B = 3^{-60}$ และ $C = 10^{-30}$ จากน้อยไปมาก

เฉลย ทำเลขชี้กำลังให้เป็น -10 เท่ากัน $A = (2^{10})^{-10} = \frac{1}{1024^{10}}$, $B = (3^6)^{-10} = \frac{1}{729^{10}}$ และ $C = (10^3)^{-10} = \frac{1}{1000^{10}}$ เนื่องจาก $729 < 1000 < 1024$ ส่วนกลับจึงเรียงกลับกัน ดังนั้น $A < C < B$ หรือ $2^{-100} < 10^{-30} < 3^{-60}$

8. ให้ $a_k = 2^k + 3^k$ สำหรับจำนวนเต็ม k จงหาค่าของ $\frac{a_{11}a_9 - (a_{10})^2}{a_6a_4 - (a_5)^2}$

เฉลย สำหรับจำนวนเต็ม n ใด ๆ พจน์ 2^{2n} และ 3^{2n} หักล้างกัน เหลือ $a_{n+1}a_{n-1} - (a_n)^2 = 2^{n+1}3^{n-1} + 2^{n-1}3^{n+1} - 2 \cdot 6^n = 6^{n-1}(4 + 9 - 12) = 6^{n-1}$ ตัวเศษจึงเป็น 6^9 และตัวส่วนเป็น 6^4 ดังนั้นได้ $6^5 = 7776$

10. จงหาผลบวกของจำนวนเต็ม n ทั้งหมดที่ทำให้ $(n^2 - 3n + 1)^{n^2-4} = 1$

เฉลย ฐานไม่เป็นศูนย์สำหรับทุกจำนวนเต็ม n มีสามกรณี (1) ฐานเท่ากับ 1: $n^2 - 3n = 0$ ได้ $n = 0, 3$ (2) เลขชี้กำลังเป็น 0: $n = \pm 2$ (3) ฐานเท่ากับ -1 และเลขชี้กำลังเป็นจำนวนคู่: $n^2 - 3n + 2 = 0$ ได้ $n = 1$ ซึ่งเลขชี้กำลังเป็น -3 ใช้ไม่ได้ และ $n = 2$ ขัดกับกรณี (2) จึงได้ $n = -2, 0, 2, 3$ ดังนั้นผลบวกคือ 3

รากที่ n และจำนวนในรูปกรณฑ์

ให้ n เป็นจำนวนเต็มที่มีค่ามากกว่า 1 จำนวนจริง b เป็นรากที่ n ของ a เมื่อ $b^n = a$ เช่น รากที่สี่ของ 16 คือ 2 และ -2 ส่วนรากที่สามของ -8 มีตัวเดียวคือ -2

ค่าหลักของรากที่ n ของ a เขียนแทนด้วย $\sqrt[n]{a}$ โดยเมื่อ $a \geq 0$ คือรากที่ไม่เป็นลบ เมื่อ $a < 0$ และ n เป็นจำนวนคี่ คือรากที่เป็นลบ ส่วนเมื่อ $a < 0$ และ n เป็นจำนวนคู่ จะไม่มีรากที่เป็นจำนวนจริง

$\sqrt[n]{a^n} = |a|$ เมื่อ n เป็นจำนวนคู่ และ $\sqrt[n]{a^n} = a$ เมื่อ n เป็นจำนวนคี่

$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ และ $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ เมื่อรากทุกตัวหาค่าได้และ $b \neq 0$

ถอดรากซ้อน $\sqrt{(x+y) \pm 2\sqrt{xy}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$ เมื่อ $x \geq y \geq 0$ และทำตัวส่วนด้วยคอนจูเกต

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$$

ข้อควรระวัง $\sqrt{(-3)^2} = 3$ ไม่ใช่ -3 และ $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ ถ้าจะเปรียบเทียบกรณฑ์ต่างอันดับ ต้องทำอันดับให้เท่ากันก่อน เช่น $\sqrt{2} = \sqrt[4]{8}$ และ $\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{9}$ จึงได้ $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$

ตัวอย่าง

จงหาค่าของ $\sqrt{7-4\sqrt{3}} + \frac{1}{2-\sqrt{3}}$

วิธีทำ เขียน $7-4\sqrt{3} = 7-2\sqrt{12}$ แล้วหาสองจำนวนที่บวกกันได้ 7 และคูณกันได้ 12 คือ 4 กับ 3 จึงได้

$$\sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{4-3} = 2-\sqrt{3}$$

พจน์หลังคูณทั้งเศษและส่วนด้วยคอนจูเกต $2+\sqrt{3}$

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} = 2+\sqrt{3}$$

ดังนั้นผลรวมเท่ากับ $(2-\sqrt{3}) + (2+\sqrt{3}) = 4$

โจทย์

1. จงหาค่าของ $\sqrt[3]{-27} + \sqrt[4]{81} - \sqrt{(-5)^2}$

เฉลย $\sqrt[3]{-27} = -3$, $\sqrt[4]{81} = 3$ และ

$$\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5 \text{ ดังนั้นได้ } -3 + 3 - 5 = -5$$

2. จงทำให้ $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{16} + \sqrt{32} - \sqrt{18}$ อยู่ในรูปอย่างง่าย

เฉลย $\sqrt[3]{54} = 3\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ และ $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ รวมพจน์ที่เหมือนกัน ดังนั้นได้ $\sqrt[3]{2} + \sqrt{2}$

3. ถ้า $-2 < x < 3$ จงทำให้ $\sqrt{x^2 + 4x + 4} + \sqrt[4]{(x-3)^4} + \sqrt[3]{(x-3)^3}$ อยู่ในรูปอย่างง่าย
- เฉลย $\sqrt{(x+2)^2} = |x+2| = x+2$ เพราะ $x+2 > 0$ และ $\sqrt[4]{(x-3)^4} = |x-3| = 3-x$ เพราะ $x-3 < 0$ ส่วนรากที่สามได้ $x-3$ รวมกันได้ $(x+2) + (3-x) + (x-3)$ ดังนั้นได้ $x+2$

5. จงหาค่าของ $\sqrt{11+6\sqrt{2}} - \sqrt{9-4\sqrt{2}}$
- เฉลย $11+6\sqrt{2} = 11+2\sqrt{18}$ โดย $9+2 = 11$ และ $9 \cdot 2 = 18$ จึงได้ $3+\sqrt{2}$ ส่วน $9-4\sqrt{2} = 9-2\sqrt{8}$ โดย $8+1 = 9$ จึงได้ $\sqrt{8}-1 = 2\sqrt{2}-1$ ดังนั้นผลต่างคือ $4-\sqrt{2}$

7. จงทำตัวส่วนของ $\frac{1}{\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{3+1}}$ ให้ไม่ติดกรณฑ์
- เฉลย ให้ $t = \sqrt[3]{3}$ ตัวส่วนคือ $t^2 - t + 1$ ซึ่งเมื่อคูณด้วย $t+1$ ได้ $t^3 + 1 = 3 + 1 = 4$ จึงคูณทั้งเศษและส่วนด้วย $t+1$ ดังนั้นได้ $\frac{\sqrt[3]{3}+1}{4}$

9. ถ้า $\sqrt{11} = a + b$ โดย a เป็นจำนวนเต็ม และ $0 < b < 1$ จงหาค่าของ $b^2 + 6b$
- เฉลย $3 < \sqrt{11} < 4$ จึงได้ $a = 3$ และ $b = \sqrt{11} - 3$ ดังนั้น $b^2 + 6b = b(b+6) = (\sqrt{11}-3)(\sqrt{11}+3) = 11-9 = 2$

4. จงทำตัวส่วนให้ไม่ติดกรณฑ์ แล้วหาค่าของ

$$\frac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}}$$

เฉลย $\frac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{6(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{5-2} = 2\sqrt{5} + 2\sqrt{2}$ และ $\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ ดังนั้นได้ $2\sqrt{5} + \sqrt{2}$

6. จงเรียง $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$ และ $\sqrt[5]{26}$ จากน้อยไปมาก

เฉลย ทำให้เป็นรากที่ 6 ทั้งหมด $\sqrt{3} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{27}$ และ $\sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{25}$ เนื่องจาก $25 < 26 < 27$ ดังนั้น $\sqrt[6]{25} < \sqrt[6]{26} < \sqrt[6]{27}$

8. จงหาค่าของ $\frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} + \frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}} + \frac{1}{\sqrt{7+2\sqrt{12}}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{49+2\sqrt{600}}}$

เฉลย พจน์ที่ k คือ $\frac{1}{\sqrt{(k+1)+k+2\sqrt{k(k+1)}}}$ เมื่อ $k = 1, 2, \dots, 24$ ถอดรากซ้อนได้ $\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$ ผลรวมจึงยุบตัวเหลือ $\sqrt{25} - \sqrt{1}$ ดังนั้นได้ 4

10. จงหาจำนวนเต็มบวก n ที่น้อยที่สุด ซึ่งทำให้

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < 0.05$$

เฉลย $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ จึงต้องการ $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} > 20$ ซึ่งเพิ่มขึ้นตาม n เมื่อ $n = 99$ ได้ $10 + \sqrt{99} < 20$ แต่เมื่อ $n = 100$ ได้ $\sqrt{101} + 10 > 20$ ดังนั้น $n = 100$

เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ

เมื่อฐาน $a > 0$ เราขยายเลขชี้กำลังให้เป็นจำนวนตรรกยะได้ โดยใช้รากที่ n เป็นตัวเชื่อม

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ และ $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$ เมื่อ $a > 0$, m เป็นจำนวนเต็ม และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

สมบัติ $a^r a^s = a^{r+s}$, $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$, $(a^r)^s = a^{rs}$, $(ab)^r = a^r b^r$ ใช้ได้เมื่อ r, s เป็นจำนวนตรรกยะหรือจำนวนจริง และ $a, b > 0$ เช่น $2^{\sqrt{2}} \cdot 2^{-\sqrt{2}} = 2^0 = 1$

ข้อควรระวังเรื่องฐานลบ $(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2$ แต่ถ้าเปลี่ยน $\frac{1}{3}$ เป็น $\frac{2}{6}$ แล้วคิด $\sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$ จะได้ค่าขัดกัน สมบัติข้างบนจึงใช้กับฐานบวกเท่านั้น ถ้าฐานเป็นลบให้คิดจากรากที่ n โดยตรง

ตัวอย่าง

จงหาค่าของ $\left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} + (0.25)^{-1.5}$

วิธีทำ พจน์แรกกลับเศษเป็นส่วนเพื่อทำเลขชี้กำลังให้เป็นบวก แล้วถอดรากที่สามก่อนยกกำลังสอง

$$\left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

พจน์หลัง $0.25 = \frac{1}{4}$ และ $-1.5 = -\frac{3}{2}$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} = 4^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{4})^3 = 8$$

ดังนั้นได้ $\frac{4}{9} + 8 = \frac{76}{9}$

โจทย์

1. จงหาค่าของ $16^{\frac{3}{4}} + 27^{-\frac{2}{3}} \cdot 81^{\frac{1}{2}}$

เฉลย $16^{\frac{3}{4}} = (\sqrt[4]{16})^3 = 8$, $27^{-\frac{2}{3}} =$

$$\frac{1}{(\sqrt[3]{27})^2} = \frac{1}{9} \text{ และ } 81^{\frac{1}{2}} = 9 \text{ ดังนั้นได้ } 8 + \frac{1}{9} \cdot 9 = 9$$

2. เมื่อ $x > 0$ จงเขียน $\frac{\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x^3}}$ ในรูป x^r

เฉลย เขียนเป็น $\frac{x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{3}{2}}} = x^{\frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{3}{2}}$ โดย

$$\frac{8+3-18}{12} = -\frac{7}{12} \text{ ดังนั้นได้ } x^{-\frac{7}{12}}$$

3. จงหาค่าของ $\frac{(0.008)^{-\frac{1}{3}} \cdot (0.25)^{0.5}}{(0.0016)^{0.25}}$

เฉลย $0.008 = \left(\frac{1}{5}\right)^3$ จึงได้ $(0.008)^{-\frac{1}{3}} = 5$,
 $(0.25)^{0.5} = \frac{1}{2}$ และ $0.0016 = \left(\frac{1}{5}\right)^4$ จึงได้
 $(0.0016)^{0.25} = \frac{1}{5}$ ดังนั้นได้ $5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 = \frac{25}{2}$

5. จงเขียน $\sqrt{3^3 9 \sqrt{3}}$ ในรูป 3^r

เฉลย คิดจากในออกนอก $9\sqrt{3} = 3^{\frac{5}{2}}$ ถอดรากที่สามได้ $3^{\frac{5}{6}}$ คูณด้วย 3 ได้ $3^{\frac{11}{6}}$ แล้วถอดรากที่สอง ดังนั้นได้ $3^{\frac{11}{12}}$

7. ถ้า $x > 0$ และ $x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}} = 3$ จงหาค่าของ

ก. $x^{\frac{2}{3}} + x^{-\frac{2}{3}}$

ข. $x + x^{-1}$

เฉลย ก. ยกกำลังสองทั้งสองข้าง $x^{\frac{2}{3}} + 2 + x^{-\frac{2}{3}} = 9$ ได้ $x^{\frac{2}{3}} + x^{-\frac{2}{3}} = 7$

ข. ยกกำลังสาม $x + x^{-1} + 3\left(x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}}\right) = 27$ ได้ $x + x^{-1} = 27 - 9 = 18$

4. จงหาค่าของ $\frac{3^{\sqrt{2}+1} \cdot 9^{1-\sqrt{2}}}{27^{-\frac{\sqrt{2}}{3}}}$

เฉลย เปลี่ยนเป็นฐาน 3 ได้ $\frac{3^{\sqrt{2}+1} \cdot 3^{2-2\sqrt{2}}}{3^{-\sqrt{2}}}$ เลขชี้กำลังรวมเป็น $(\sqrt{2} + 1) + (2 - 2\sqrt{2}) + \sqrt{2} = 3$ ดังนั้นได้ $3^3 = 27$

6. เมื่อ $a, b > 0$ และ $a \neq b$ จงทำให้ $\frac{a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} - (ab)^{\frac{1}{2}}$ อยู่ในรูปอย่างง่าย

เฉลย ให้ $p = a^{\frac{1}{2}}$ และ $q = b^{\frac{1}{2}}$ ตัวเศษคือ $p^3 - q^3 = (p - q)(p^2 + pq + q^2)$ ผลหารจึงเป็น $p^2 + pq + q^2 = a + (ab)^{\frac{1}{2}} + b$ เมื่อลบ $(ab)^{\frac{1}{2}}$ ดังนั้นได้ $a + b$

8. จงหาค่าของ $\frac{1}{\frac{1}{2^8}-1} - \frac{1}{\frac{1}{2^8}+1} - \frac{2}{\frac{1}{2^4}+1} - \frac{4}{\frac{1}{2^2}+1}$

เฉลย ให้ $a = 2^{\frac{1}{8}}$ จะได้ $2^{\frac{1}{4}} = a^2$, $2^{\frac{1}{2}} = a^4$
 และ $\frac{1}{a-1} - \frac{1}{a+1} = \frac{2}{a^2-1}$ ต่อไป $\frac{2}{a^2-1} - \frac{2}{a^2+1} = \frac{4}{a^4-1}$ และ $\frac{4}{a^4-1} - \frac{4}{a^4+1} = \frac{8}{a^8-1}$ เนื่องจาก $a^8 = 2$ ดังนั้นได้ 8

โจทย์ผสม

1. จงหาค่าของ $\frac{2^{-1}+3^{-1}}{2^{-1}-3^{-1}} + \sqrt[3]{-64} \cdot 4^{-\frac{1}{2}}$

เฉลย $\frac{2^{-1}+3^{-1}}{2^{-1}-3^{-1}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{6}} = 5$ และ $\sqrt[3]{-64} \cdot 4^{-\frac{1}{2}} = (-4) \cdot \frac{1}{2} = -2$ ดังนั้นได้ $5 - 2 = 3$

2. ถ้า $x = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$ จงหาค่าของ $x^3 - x^{-3}$

เฉลย ถอดรากซ้อนได้ $x = \sqrt{2} + 1$ และ $x^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1$ จึงได้ $x - x^{-1} = 2$
 จาก $x^3 - x^{-3} = (x - x^{-1})^3 + 3(x - x^{-1})$
 ดังนั้นได้ $8 + 6 = 14$

3. ถ้า $4^a = \sqrt{27}$ และ $3^b = \sqrt[3]{4}$ จงหาค่าของ 16^{ab}

เฉลย $16^{ab} = (4^a)^{2b} = (\sqrt{27})^{2b} = 27^b$
และ $27^b = (3^b)^3 = (\sqrt[3]{4})^3$ ดังนั้น $16^{ab} = 4$

5. จงหาจำนวนเต็มบวก n ที่น้อยที่สุด ซึ่งทำให้ทั้ง $\sqrt[3]{\frac{n}{2}}$ และ $\sqrt{\frac{n}{3}}$ เป็นจำนวนเต็ม

เฉลย n ที่น้อยที่สุดอยู่ในรูป $2^a \cdot 3^b$ (ตัวประกอบเฉพาะอื่นทำให้ n ใหญ่ขึ้นเปล่า ๆ) ต้องให้ $\frac{n}{2} = 2^{a-1}3^b$ เป็นกำลังสาม คือ $a-1$ และ b หารด้วย 3 ลงตัว และ $\frac{n}{3} = 2^a3^{b-1}$ เป็นกำลังสอง คือ a และ $b-1$ เป็นจำนวนคู่ ค่าน้อยสุดคือ $a = 4, b = 3$ ดังนั้น $n = 16 \cdot 27 = 432$

7. จงหาจำนวนเต็มที่มากที่สุดที่น้อยกว่า $(\sqrt{5} + \sqrt{3})^6$

เฉลย ให้ $u = (\sqrt{5} + \sqrt{3})^2 = 8 + 2\sqrt{15}$
และ $v = (\sqrt{5} - \sqrt{3})^2 = 8 - 2\sqrt{15}$ จะได้
 $u + v = 16, uv = 4$ และ $u^3 + v^3 = (u + v)^3 - 3uv(u + v) = 4096 - 192 = 3904$ เนื่องจาก $0 < v < 1$ จึงได้ $0 < v^3 < 1$
ค่า $u^3 = 3904 - v^3$ อยู่ระหว่าง 3903 กับ 3904 ดังนั้นตอบ 3903

4. จงหาค่าของ $(2 + \sqrt{5})^{\frac{1}{3}} \cdot (9 - 4\sqrt{5})^{\frac{1}{6}}$

เฉลย $9 - 4\sqrt{5} = (\sqrt{5} - 2)^2$ และ $\sqrt{5} - 2 > 0$ จึงได้ $(9 - 4\sqrt{5})^{\frac{1}{6}} = (\sqrt{5} - 2)^{\frac{1}{3}}$ ผลคูณจึงเป็น $((2 + \sqrt{5})(\sqrt{5} - 2))^{\frac{1}{3}} = (5 - 4)^{\frac{1}{3}}$ ดังนั้นได้ 1

6. จงหาค่าของ $\sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}}$

เฉลย ให้ผลบวกนี้เป็น a ผลคูณของสองพจน์คือ $\sqrt[3]{45^2 - 2 \cdot 29^2} = \sqrt[3]{343} = 7$ จาก $(p + q)^3 = p^3 + q^3 + 3pq(p + q)$ ได้ $a^3 = 90 + 21a$ หรือ $(a - 6)(a^2 + 6a + 15) = 0$ ตัวประกอบหลังไม่มีรากจริง (ดิสคริมิแนนต์ $36 - 60 < 0$) ดังนั้น $a = 6$

8. จงหาจำนวนเต็ม $n \geq 2$ ทั้งหมดที่ทำให้ $\sqrt[n]{2^{12}} \cdot \sqrt[3]{4^n} = 64$

เฉลย เขียนเป็นฐาน 2 ได้ $2^{\frac{12}{n}} \cdot 2^{\frac{2n}{3}} = 2^6$ จึงได้ $\frac{12}{n} + \frac{2n}{3} = 6$ หรือ $n^2 - 9n + 18 = 0$ ได้ $(n - 3)(n - 6) = 0$ ดังนั้น $n = 3, 6$

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

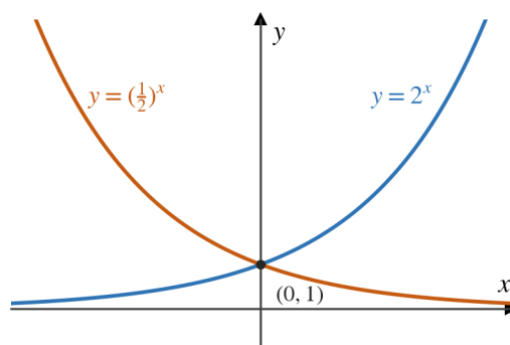
ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและกราฟ

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล คือฟังก์ชันในรูป $f(x) = a^x$ เมื่อ $a > 0$ และ $a \neq 1$ (ถ้า $a = 1$ จะได้ $y = 1$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันคงตัว) ฐานที่พบบ่อยคือ จำนวน $e \approx 2.718$ ซึ่งให้ฟังก์ชัน $y = e^x$

โดเมนคือ $\mathbb{R}$ เรนจ์คือ $(0, \infty)$ กราฟผ่านจุด $(0,1)$ เสมอ และมีเส้นกำกับ $y = 0$ (แกน x)

ถ้า $a > 1$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ถ้า $0 < a < 1$ เป็นฟังก์ชันลด และทั้งสองกรณีเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

กราฟของ $y = a^x$ กับ $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$ สมมาตรกันเทียบกับแกน y



การเลื่อนกราฟ $y = a^{x-h} + k$ คือเลื่อนกราฟ $y = a^x$ ไปทางขวา h หน่วยและขึ้น k หน่วย ได้เส้นกำกับ $y = k$ และเรนจ์ (k, ∞) ส่วน $y = -a^x$ คือการสะท้อนเทียบกับแกน x มีเรนจ์ $(-\infty, 0)$

ตัวอย่าง

จงหาเส้นกำกับ เรนจ์ และจุดตัดแกนทั้งสองของกราฟ $y = 2^{x+1} - 4$

วิธีทำ กราฟนี้คือ $y = 2^x$ ที่เลื่อนไปทางซ้าย 1 หน่วยและลง 4 หน่วย จึงมีเส้นกำกับ $y = -4$ และเรนจ์ $(-4, \infty)$

จุดตัดแกน y แทน $x = 0$ ได้ $y = 2 - 4 = -2$ ส่วนจุดตัดแกน x แทน $y = 0$ ได้

$$2^{x+1} = 4 = 2^2 \Rightarrow x + 1 = 2$$

ดังนั้นกราฟตัดแกนที่ $(0, -2)$ และ $(1, 0)$

ตัวอย่าง

จงหาสมการของกราฟที่ได้จากการเลื่อนกราฟ $y = 2^x$ ไปทางขวา 3 หน่วย แล้วสะท้อนเทียบกับแกน y

วิธีทำ เลื่อนได้ $y = 2^{x-3}$ แล้วแทน x ด้วย $-x$ ได้ $y = 2^{-x-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3}$ (ลำดับการแปลงสำคัญ)

ข้อสังเกต เมื่อ $a > b > 1$ กราฟ $y = a^x$ กับ $y = b^x$ ตัดกันที่ $(0,1)$ จุดเดียว และในช่วง $x > 0$ กราฟ $y = a^x$ อยู่เหนือและชันกว่า ฐานยิ่งมาก กราฟจึงยิ่งพุ่งขึ้นเร็วทางขวาของแกน y

โจทย์

1. จากฟังก์ชัน $y = \left(\frac{e}{3}\right)^x$, $y = x^e$, $y = (1 - \sqrt{2})^x$, $y = \left(\frac{\pi}{e}\right)^x$, $y = 1^x$ และ $y = 4^{-x}$ ฟังก์ชันใดเป็นฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล และเป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือลด

เฉลย $y = x^e$ ไม่ใช่ เพราะตัวแปรอยู่ที่ฐาน ส่วน $1 - \sqrt{2} < 0$ และฐาน 1 ใช้ไม่ได้ ที่เหลือเป็นฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล คือ $\left(\frac{e}{3}\right)^x$ ลด เพราะ $\frac{e}{3} < 1$, $\left(\frac{\pi}{e}\right)^x$ เพิ่ม เพราะ $\frac{\pi}{e} > 1$ และ $4^{-x} = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ ลด

3. จงหาเรนจ์และสมการเส้นกำกับของกราฟต่อไปนี้

ก. $y = 3^x + 2$

ข. $y = -e^x$

ค. $y = 2^{x+1} + 2^x - 3$

เฉลย ก. เลื่อนขึ้น 2 หน่วย เรนจ์ $(2, \infty)$ เส้นกำกับ $y = 2$

ข. สะท้อนเทียบแกน x เรนจ์ $(-\infty, 0)$ เส้นกำกับ $y = 0$

ค. $y = 2^x(2 + 1) - 3 = 3 \cdot 2^x - 3$ และ $3 \cdot 2^x > 0$ เรนจ์ $(-3, \infty)$ เส้นกำกับ $y = -3$

2. กราฟของ $f(x) = a^x$ ผ่านจุด $(-2, 9)$ จงหาค่า a และ $f(-1)$ พร้อมบอกว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือลด

เฉลย $a^{-2} = 9$ จึงได้ $a^2 = \frac{1}{9}$ และเพราะ $a > 0$ ได้ $a = \frac{1}{3}$ ดังนั้น $f(-1) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3$ และ f เป็นฟังก์ชันลด เพราะ $0 < a < 1$

4. พิสูจน์วาดกราฟ $y = 4^x$ ด้วยหมึกที่ยังไม่แห้ง แล้วพับกระดาษตามแนวแกน y รอยหมึกที่ติดอีกฝั่งเป็นกราฟ $y = g(x)$ จงหา $g(x)$ และค่าของ $g\left(\frac{3}{2}\right) + g\left(-\frac{1}{2}\right)$

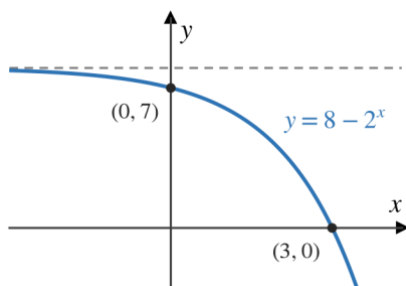
เฉลย การพับตามแกน y คือการสะท้อนเทียบ

แกน y จึงได้ $g(x) = 4^{-x} = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ ดังนั้น

$$g\left(\frac{3}{2}\right) + g\left(-\frac{1}{2}\right) = 4^{-\frac{3}{2}} + 4^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8} + 2 = \frac{17}{8}$$

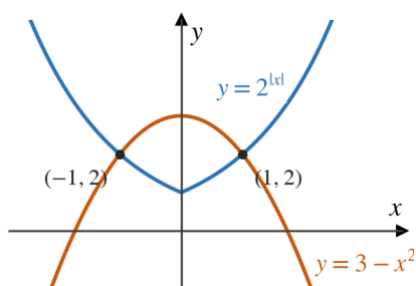
5. จงร่างกราฟของ $y = 8 - 2^x$ พร้อมบอกเส้นกำกับ เบนซ์ และจุดตัดแกนทั้งสอง

เฉลย สะท้อน $y = 2^x$ เทียบแกน x แล้วเลื่อนขึ้น 8 หน่วย ได้เส้นกำกับ $y = 8$ เบนซ์ $(-\infty, 8)$ ตัดแกน y ที่ $(0, 7)$ และตัดแกน x เมื่อ $2^x = 8$ คือที่ $(3, 0)$



7. กราฟของ $y = 2^{|x|}$ กับกราฟของ $y = 3 - x^2$ ตัดกันกี่จุด จงหาพิกัดของจุดตัดทั้งหมด

เฉลย ทั้งสองกราฟสมมาตรเทียบแกน y เมื่อ $x \geq 0$ กราฟ $y = 2^x$ เพิ่มขึ้น แต่ $y = 3 - x^2$ ลดลง จึงตัดกันได้ไม่เกิน 1 จุด และ $x = 1$ ให้ $y = 2$ ทั้งคู่ โดยสมมาตรได้อีกจุดที่ $x = -1$ ดังนั้นตัดกัน 2 จุด คือ $(1, 2)$ และ $(-1, 2)$

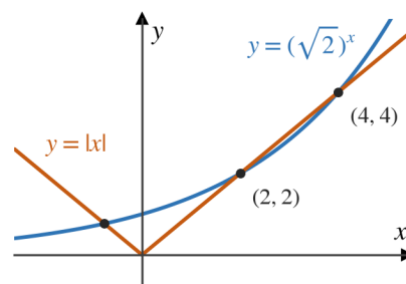


6. กราฟของ $y = a^x + b$ เมื่อ $a > 0$ และ $a \neq 1$ ผ่านจุด $(1, 1)$ และ $(2, 7)$ จงหาค่า a, b และเรนจ์ของฟังก์ชันนี้

เฉลย จาก $a + b = 1$ และ $a^2 + b = 7$ ลบกันได้ $a^2 - a - 6 = 0$ หรือ $(a - 3)(a + 2) = 0$ เพราะ $a > 0$ จึงได้ $a = 3$ และ $b = -2$ ดังนั้น $y = 3^x - 2$ มีเรนจ์ $(-2, \infty)$

8. กราฟของ $y = (\sqrt{2})^x$ กับกราฟของ $y = |x|$ ตัดกันกี่จุด จงแสดงเหตุผล

เฉลย เมื่อ $x \geq 0$ เส้นตรง $y = x$ ตัดเส้นโค้ง $y = (\sqrt{2})^x$ ได้ไม่เกิน 2 จุด และ $x = 2, x = 4$ ใช้ได้ เพราะ $(\sqrt{2})^2 = 2, (\sqrt{2})^4 = 4$ เมื่อ $x < 0$ กราฟ $y = -x$ ลด แต่ $(\sqrt{2})^x$ เพิ่มขึ้น จึงตัดกันได้ไม่เกิน 1 จุด โดยที่ $x = -1$ ได้ $1 > \frac{1}{\sqrt{2}}$ และที่ $x = 0$ ได้ $0 < 1$ จึงมีจุดตัดใน $(-1, 0)$ อีก 1 จุด ดังนั้นตัดกัน 3 จุด



สมบัติและการเปรียบเทียบค่าเลขยกกำลัง

เพราะ $y = a^x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลดเสมอ เราจึงเปรียบเทียบเลขยกกำลังที่มีฐานเดียวกันได้จากเลขชี้กำลัง

ถ้า $a > 1$ แล้ว $a^u < a^v \Leftrightarrow u < v$ (ทิศเดิม)

ถ้า $0 < a < 1$ แล้ว $a^u < a^v \Leftrightarrow u > v$ (กลับทิศ)

$a^u = a^v \Leftrightarrow u = v$ (หนึ่งต่อหนึ่ง) และถ้า $0 < a < b$ กับ $n > 0$ แล้ว $a^n < b^n$

ตัวอย่าง

จงเรียงจำนวน 2^{45} , 3^{30} และ 5^{15} จากน้อยไปมาก

วิธีทำ ฐานต่างกัน จึงทำเลขชี้กำลังให้เท่ากัน โดย ห.ร.ม. ของ 45, 30 และ 15 คือ 15

$$2^{45} = (2^3)^{15} = 8^{15}, 3^{30} = (3^2)^{15} = 9^{15}$$

เลขชี้กำลังเท่ากันและเป็นบวก ฐานมากกว่าจึงได้ค่ามากกว่า และ $5 < 8 < 9$

ดังนั้น $5^{15} < 2^{45} < 3^{30}$

ค่าต่ำสุดและค่าสูงสุด แทน $u = a^x$ แล้วจัดกำลังสองสมบูรณ์ แต่ต้องจำว่า $u > 0$ เสมอ อีกเครื่องมือหนึ่งคือ $a^x + a^{-x} \geq 2$ ซึ่งเท่ากับ 2 เมื่อ $x = 0$ เท่านั้น (เพราะ $u + \frac{1}{u} - 2 = \frac{(u-1)^2}{u} \geq 0$)

โจทย์

1. จงเปรียบเทียบว่าจำนวนใดในแต่ละคู่มากกว่า

ก. $3^{\sqrt{2}}$ กับ $3^{1.5}$

ข. $(0.7)^{-2}$ กับ $(0.7)^{-3}$

ค. $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{0.2}$ กับ 1

เฉลย ก. ฐาน $3 > 1$ และ $\sqrt{2} \approx 1.414 < 1.5$

จึงได้ $3^{\sqrt{2}} < 3^{1.5}$

ข. ฐาน $0.7 < 1$ และ $-2 > -3$ จึงได้

$(0.7)^{-2} < (0.7)^{-3}$

ค. $0 < \frac{\pi}{4} < 1$ และ $0.2 > 0$ จึงได้ $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{0.2} <$

$\left(\frac{\pi}{4}\right)^0 = 1$

2. กำหนด $f(x) = 2^x$ ถ้า $f(a) \cdot f(3) =$

$f(2a - 1)$ จงหาค่า a

เฉลย $2^a \cdot 2^3 = 2^{2a-1}$ จึงได้ $2^{a+3} = 2^{2a-1}$

เพราะฟังก์ชันเป็นหนึ่งต่อหนึ่ง $a + 3 = 2a - 1$

ดังนั้น $a = 4$

3. จงเปรียบเทียบว่าจำนวนใดในแต่ละคู่มากกว่า

ก. $8^{\frac{1}{4}}$ กับ $4^{\frac{1}{3}}$

ข. $\left(\frac{1}{9}\right)^{-0.4}$ กับ $27^{0.3}$

เฉลย ก. $8^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{3}{4}}$ และ $4^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}$ โดย $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$ จึงได้ $8^{\frac{1}{4}} > 4^{\frac{1}{3}}$

ข. $\left(\frac{1}{9}\right)^{-0.4} = 3^{0.8}$ และ $27^{0.3} = 3^{0.9}$ จึงได้ $\left(\frac{1}{9}\right)^{-0.4} < 27^{0.3}$

5. จงหาจำนวนเต็มบวก n ที่มากที่สุดที่ทำให้ $n^{200} < 5^{300}$

เฉลย เขียน $n^{200} = (n^2)^{100}$ และ $5^{300} = (5^3)^{100} = 125^{100}$ เลขชี้กำลังเท่ากันและเป็นบวก จึงต้องมี $n^2 < 125$ โดย $11^2 = 121$ แต่ $12^2 = 144$ ดังนั้น $n = 11$

7. นักเรียนคนหนึ่งตอบว่าค่าต่ำสุดของ $f(x) = 4^x + 2^{x+1} - 3$ คือ -4 จงอธิบายว่าผิดอย่างไร และหาเรนจ์ของ f

เฉลย ให้ $u = 2^x$ ได้ $f = (u+1)^2 - 4$ ค่า -4 เกิดที่ $u = -1$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้เพราะ $u > 0$ เมื่อ $u > 0$ ค่า f เพิ่มขึ้นตาม u และเข้าใกล้ -3 เมื่อ u เข้าใกล้ 0 แต่ไม่ถึง ดังนั้นเรนจ์คือ $(-3, \infty)$ และ f ไม่มีค่าต่ำสุด

4. จงหาค่า a ทั้งหมดที่ทำให้ $y = (a^2 - 3)^x$ เป็นฟังก์ชันลด

เฉลย ต้องมี $0 < a^2 - 3 < 1$ หรือ $3 < a^2 < 4$ ซึ่งคือ $\sqrt{3} < |a| < 2$ ดังนั้น $a \in (-2, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 2)$

6. จงหาค่าต่ำสุดของ $f(x) = 9^x - 2 \cdot 3^{x+1} + 11$ และค่า x ที่ทำให้ f มีค่าต่ำสุด

เฉลย ให้ $u = 3^x > 0$ จะได้ $f = u^2 - 6u + 11 = (u-3)^2 + 2$ ค่าต่ำสุดเกิดเมื่อ $u = 3$ ซึ่งเป็นบวก จึงใช้ได้ ได้ $3^x = 3$ ดังนั้นค่าต่ำสุดคือ 2 เมื่อ $x = 1$

8. จงหาค่าต่ำสุดของ $f(x) = 4^x + 4^{-x} - 2^{x+1} - 2^{1-x} + 5$ และค่า x ที่ทำให้ f มีค่าต่ำสุด

เฉลย ให้ $t = 2^x + 2^{-x}$ จะได้ $t \geq 2$ และ $4^x + 4^{-x} = t^2 - 2$ ส่วน $2^{x+1} + 2^{1-x} = 2t$ จึงได้ $f = t^2 - 2t + 3 = (t-1)^2 + 2$ จุดยอด $t = 1$ อยู่นอกช่วง $t \geq 2$ และ f เพิ่มขึ้นเมื่อ $t \geq 2$ ค่าต่ำสุดจึงอยู่ที่ $t = 2$ หรือ $x = 0$ ดังนั้นค่าต่ำสุดคือ 3

โจทย์ผสม

1. กำหนด $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 3$ จงหาเรนจ์และเส้นกำกับของกราฟ f แล้วเปรียบเทียบ $f(\sqrt{5})$ กับ $f(2.2)$

เฉลย $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} > 0$ จึงได้เรนจ์ $(3, \infty)$ และเส้นกำกับ $y = 3$ ฐาน $\frac{1}{2} < 1$ ทำให้ f เป็นฟังก์ชันลด โดย $\sqrt{5} \approx 2.236 > 2.2$ ดังนั้น $f(\sqrt{5}) < f(2.2)$

3. เส้นตรง $y = k$ เมื่อ $k > 1$ ตัดกราฟ $y = 4^x$, $y = 2^x$ และ $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ที่จุด A, B และ C ตามลำดับ ถ้า $AB = 1$ จงหาค่า k และความยาว BC

เฉลย ให้ $B = (b, k)$ และ $A = (p, k)$ จะได้ $2^b = k = 4^p = 2^{2p}$ จึงได้ $p = \frac{b}{2}$ โดย $b > 0$ เพราะ $k > 1$ ดังนั้น $AB = b - \frac{b}{2} = \frac{b}{2} = 1$ ได้ $b = 2$ และ $k = 4$ ส่วน C สมมาตรกับ B เทียบแกน y คือ $(-2, 4)$ ดังนั้น $BC = 4$

2. ฟังก์ชัน f มี $f(x) > 0$ และ $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ สำหรับทุกจำนวนจริง x, y ถ้า $f(2) = \frac{1}{4}$ จงหา $f(0)$, $f(1)$ และ $f(-3)$ แล้วบอกว่าถ้า f เป็นฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล จะเป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือลด

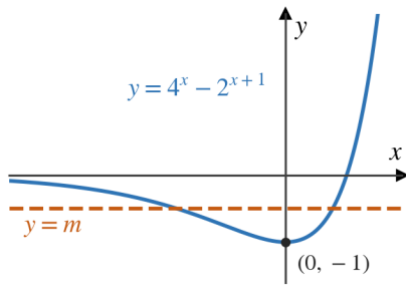
เฉลย $f(0) = (f(0))^2$ และ $f(0) > 0$ จึงได้ $f(0) = 1$ จาก $(f(1))^2 = f(2) = \frac{1}{4}$ ได้ $f(1) = \frac{1}{2}$ และ $f(3) = f(2)f(1) = \frac{1}{8}$ กับ $f(-3)f(3) = f(0) = 1$ จึงได้ $f(-3) = 8$ ดังนั้น $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ เป็นฟังก์ชันลด

4. โดยไม่ใช้เครื่องคิดเลข จงเปรียบเทียบว่า $2^{\sqrt{3}}$ กับ $3^{\sqrt{2}}$ จำนวนใดมากกว่า (แนะ: เทียบทั้งสองจำนวนกับ 4)

เฉลย $\sqrt{3} < 2$ จึงได้ $2^{\sqrt{3}} < 2^2 = 4$ และ $\sqrt{2} > 1.4$ จึงได้ $3^{\sqrt{2}} > 3^{\frac{7}{5}}$ โดย $\left(3^{\frac{7}{5}}\right)^5 = 3^7 = 2187 > 1024 = 4^5$ ทำให้ $3^{\frac{7}{5}} > 4$ ดังนั้น $3^{\sqrt{2}} > 2^{\sqrt{3}}$

5. จงหาค่า m ทั้งหมดที่ทำให้เส้นตรง $y = m$ ตัดกราฟของ $y = 4^x - 2^{x+1}$ สองจุด

เฉลย ให้ $u = 2^x > 0$ (แต่ละ u ให้ x เพียงค่าเดียว) จะได้ $y = u^2 - 2u = (u - 1)^2 - 1$ เมื่อ u เพิ่มจากใกล้ 0 ถึง 1 ค่า y ลดจากใกล้ 0 ถึง -1 และเมื่อ $u > 1$ ค่า y เพิ่มขึ้นไม่มีขอบเขต ดังนั้นเส้น $y = m$ ตัดกราฟสองจุดเมื่อ $-1 < m < 0$



7. จุด $(p, 3)$ และ $(q, 12)$ อยู่บนกราฟ $y = 2^x$ จงหาค่าของ $q - p$ และ 2^{p+q}

เฉลย $2^p = 3$ และ $2^q = 12$ จึงได้ $2^{q-p} = \frac{12}{3} = 4 = 2^2$ ดังนั้น $q - p = 2$ และ $2^{p+q} = 2^p \cdot 2^q = 36$

9. จงหาค่า k ทั้งหมดที่ทำให้กราฟของ $y = 2^x + k$ ผ่านจุดภาคที่ 3 แต่ไม่ผ่านจุดภาคที่ 4

เฉลย เมื่อ $x < 0$ ค่า y อยู่ในช่วง $(k, k + 1)$ กราฟผ่านจุดภาคที่ 3 เมื่อ $k < 0$ เมื่อ $x > 0$ ค่า y อยู่ในช่วง $(k + 1, \infty)$ กราฟไม่ผ่านจุดภาคที่ 4 เมื่อ $k + 1 \geq 0$ ดังนั้น $-1 \leq k < 0$

6. กำหนด $0 < a < 1$ จงเรียงจำนวน a^a, a^{a^a} และ $(a^a)^a$ จากน้อยไปมาก

เฉลย $y = a^x$ เป็นฟังก์ชันลด เพราะ $0 < a < 1$ จึงได้ $a^2 < a$ และ $a^a > a^1 = a$ เลขชี้กำลังจึงเรียงเป็น $a^2 < a < a^a$ เมื่อใช้เป็นเลขชี้กำลังของฐาน a ลำดับจะกลับ ได้ $a^{a^a} < a^a < a^{a^2} = (a^a)^a$

8. กำหนด $f(x) = 3^{-|x-2|}$ จงหาเรนจ์ของ f และเรียง $f(0), f(\sqrt{10}), f\left(\frac{7}{2}\right)$ จากน้อยไปมาก

เฉลย $-|x - 2| \leq 0$ จึงได้เรนจ์ $(0, 1]$ และค่า f ลดลงเมื่อ x อยู่ห่างจาก 2 มากขึ้น ระยะจาก 2 คือ $2, \sqrt{10} - 2 \approx 1.16$ และ $\frac{3}{2}$ ตามลำดับ ดังนั้น $f(0) < f\left(\frac{7}{2}\right) < f(\sqrt{10})$

10. จงเปรียบเทียบ $A = 2^x + 2^{-x}$ กับ $B = 3^x + 3^{-x}$ สำหรับทุกจำนวนจริง x

เฉลย แทน x ด้วย $-x$ แล้ว A และ B มีค่าเท่าเดิม จึงพิจารณา $x > 0$ ซึ่งมี $3^x > 2^x > 1$ และ $h(u) = u + \frac{1}{u}$ เพิ่มเมื่อ $u > 1$ เพราะ $h(v) - h(u) = (v - u)\left(1 - \frac{1}{uv}\right) > 0$ เมื่อ $v > u > 1$ ดังนั้น $B > A$ เมื่อ $x \neq 0$ และ $A = B = 2$ เมื่อ $x = 0$

ฟังก์ชันลอการิทึม

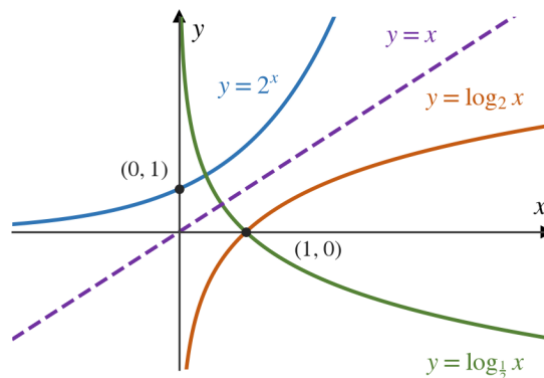
ฟังก์ชันลอการิทึมและกราฟ

ฟังก์ชันลอการิทึม คือฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล $y = a^x$ เขียนแทนด้วย $y = \log_a x$ อ่านว่า ล็อก x ฐาน a ค่าของ $\log_a x$ คือเลขชี้กำลังที่ต้องยก a ขึ้นไปแล้วได้ x

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y \text{ เมื่อ } a > 0, a \neq 1 \text{ และ } x > 0$$

โดเมน $(0, \infty)$ เรนจ์ $\mathbb{R}$ กราฟผ่านจุด $(1, 0)$ มีแกน y (เส้น $x = 0$) เป็นเส้นกำกับ และเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

$a > 1$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม และ $0 < a < 1$ เป็นฟังก์ชันลด กราฟของ $y = \log_a x$ กับ $y = a^x$ สมมาตรกันเทียบกับเส้น $y = x$



ตัวอย่าง

จงหาค่าของ $\log_{\frac{1}{4}} 32$

วิธีทำ ให้ $\log_{\frac{1}{4}} 32 = y$ จากนิยามจะได้ $\left(\frac{1}{4}\right)^y = 32$ เขียนทั้งสองข้างเป็นฐาน 2

$$2^{-2y} = 2^5$$

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง จึงได้ $-2y = 5$ ดังนั้น $\log_{\frac{1}{4}} 32 = -\frac{5}{2}$

ข้อควรระวัง โดเมนของ $y = \log_{g(x)} f(x)$ ต้องสอดคล้องครบทั้งสามเงื่อนไข คือ $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ และ $g(x) \neq 1$ อย่าลืมหาค่าที่ทำให้ฐานเท่ากับ 1

ตัวอย่าง

จงเรียง $p = \log_3 10$, $q = \log_{\frac{1}{2}} 0.3$ และ $r = \log_5 \frac{1}{2}$ จากน้อยไปมาก

วิธีทำ $2 < p < 3$ เพราะ $9 < 10 < 27$ ฐาน $\frac{1}{2}$ ทำให้ $1 < q < 2$ และ $r < 0$ ดังนั้น $r < q < p$

เทคนิค นอกจากจุด $(1, 0)$ แล้ว กราฟของ $y = \log_a x$ ทุกฐานยังผ่านจุด $(a, 1)$ และ $\left(\frac{1}{a}, -1\right)$ เสมอ ใช้สามจุดนี้กับเส้นกำกับ $x = 0$ ช่วยร่างกราฟได้อย่างรวดเร็ว

โจทย์

1. ก. จงเขียน $3^4 = 81$ ในรูปลอการิทึม

ข. จงเขียน $\log_5 \frac{1}{25} = -2$ ในรูปเลขยกกำลัง

เฉลย จาก $y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$ จะได้ ก.

$\log_3 81 = 4$ และ ข. $5^{-2} = \frac{1}{25}$

3. จงหาค่าของ $\log_{2\sqrt{2}} 16$ และ $\log_{\sqrt{5}} \sqrt[3]{\frac{1}{25}}$

เฉลย ให้ $\log_{2\sqrt{2}} 16 = y$ จะได้ $(2^{\frac{3}{2}})^y = 2^4$

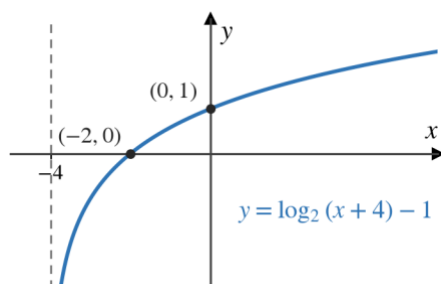
จึงได้ $\frac{3}{2}y = 4$ หรือ $y = \frac{8}{3}$ และให้

$\log_{\sqrt{5}} \sqrt[3]{\frac{1}{25}} = z$ จะได้ $(5^{\frac{1}{2}})^z = 5^{-\frac{2}{3}}$ จึงได้ $\frac{z}{2} = -\frac{2}{3}$ ดังนั้น $z = -\frac{4}{3}$

5. จงร่างกราฟของ $y = \log_2(x+4) - 1$ พร้อมบอกโดเมน เรนจ์ เส้นกำกับ และจุดตัดแกนทั้งสอง

เฉลย เลื่อนกราฟ $y = \log_2 x$ ไปทางซ้าย 4 หน่วยและลง 1 หน่วย โดเมน $(-4, \infty)$ เรนจ์ $\mathbb{R}$ เส้นกำกับ $x = -4$ ตัดแกน y ที่ $(0, 1)$ เพราะ $\log_2 4 - 1 = 1$ และตัดแกน x ที่ $(-2, 0)$

เพราะ $\log_2 2 - 1 = 0$



2. จงหาค่าของ $\log_2 64 - \log_{\frac{1}{3}} 27$

เฉลย เนื่องจาก $2^6 = 64$ จะได้ $\log_2 64 = 6$

และ $(\frac{1}{3})^{-3} = 27$ จะได้ $\log_{\frac{1}{3}} 27 = -3$ ดังนั้น

ค่าที่ต้องการคือ $6 - (-3) = 9$

4. กำหนด $f(x) = 3^{x+2} - 1$ จงหา $f^{-1}(x)$ และโดเมนของ f^{-1}

เฉลย ให้ $y = 3^{x+2} - 1$ จะได้ $3^{x+2} = y + 1$

หรือ $x = \log_3(y + 1) - 2$ สลับ x กับ y ได้

$f^{-1}(x) = \log_3(x + 1) - 2$ และโดเมนของ

f^{-1} คือเรนจ์ของ f คือ $(-1, \infty)$

6. จงหาโดเมนของ $f(x) = \log_{2x-3}(12 - x - x^2)$

เฉลย ต้องมี $12 - x - x^2 > 0$ หรือ $(x +$

$4)(x - 3) < 0$ ได้ $-4 < x < 3$ ฐาน $2x -$

$3 > 0$ ได้ $x > \frac{3}{2}$ และ $2x - 3 \neq 1$ ได้ $x \neq 2$

ดังนั้นโดเมนคือ $(\frac{3}{2}, 2) \cup (2, 3)$

7. กราฟของ $y = \log_a(x - h) + k$ มีเส้นกำกับคือเส้น $x = 2$ และผ่านจุด $(3, 1)$ กับ $(11, -1)$ จงหาค่า a, h, k และบอกว่าเป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลด

เฉลย เส้นกำกับคือ $x = h$ จึงได้ $h = 2$ แทน $(3, 1)$ ได้ $\log_a 1 + k = 1$ จึงได้ $k = 1$ แทน $(11, -1)$ ได้ $\log_a 9 = -2$ หรือ $a^{-2} = 9$ และ $a > 0$ จึงได้ $a = \frac{1}{3}$ ฐานอยู่ระหว่าง 0 กับ 1 จึงเป็นฟังก์ชันลด

9. จงหาค่าของ $\log_{\sqrt{3}}(\log_2(\log_3 6561))$

เฉลย $6561 = 3^8$ จึงได้ $\log_3 6561 = 8$ ต่อมา $\log_2 8 = 3$ และ $(\sqrt{3})^2 = 3$ จึงได้ $\log_{\sqrt{3}} 3 = 2$ ดังนั้นค่าที่ต้องการคือ 2

11. จงหาค่า a ทั้งหมดที่ทำให้ $f(x) = \log_{a^2-3} x$ เป็นฟังก์ชันลด

เฉลย f เป็นฟังก์ชันลดเมื่อฐานอยู่ระหว่าง 0 กับ 1 คือ $0 < a^2 - 3 < 1$ หรือ $3 < a^2 < 4$ ดังนั้น $a \in (-2, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 2)$

8. กำหนด $f(x) = \log_2(x + \sqrt{x^2 + 1})$ ซึ่งมีโดเมนเป็น $\mathbb{R}$ จงแสดงว่า $f(-x) = -f(x)$ ทุก x แล้วหา $f^{-1}(x)$

เฉลย ให้ $f(x) = y$ คือ $\sqrt{x^2 + 1} + x = 2^y$ เนื่องจาก $(\sqrt{x^2 + 1} + x)(\sqrt{x^2 + 1} - x) = 1$ จะได้ $\sqrt{x^2 + 1} - x = 2^{-y}$ นั่นคือ $f(-x) = -y = -f(x)$ นำสองสมการมาลบกันได้ $2x = 2^y - 2^{-y}$ ดังนั้น $f^{-1}(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2}$

10. กราฟของ $y = \log_2(x + 1)$ ผ่านจุดที่มีพิกัด x และ y เป็นจำนวนเต็มทั้งคู่ และ $x \leq 1000$ ทั้งหมดกี่จุด

เฉลย ถ้า $y = n$ จะได้ $x = 2^n - 1$ ซึ่งเป็นจำนวนเต็มเมื่อ $n \geq 0$ เท่านั้น และ $2^n - 1 \leq 1000$ ได้ $n \leq 9$ เพราะ $2^{10} = 1024$ จึงได้ $n = 0, 1, \dots, 9$ ดังนั้นมี 10 จุด

12. กำหนด $f(x) = 2^x$ และ $g(x) = \log_4 x$ จงเขียน $g(f(x))$ และ $f(g(x))$ ในรูปอย่างง่าย พร้อมบอกโดเมนของแต่ละฟังก์ชัน

เฉลย $4^{\frac{x}{2}} = 2^x$ จึงได้ $g(f(x)) = \log_4 2^x = \frac{x}{2}$ ใช้ได้ทุก x ถ้า $\log_4 x = t$ จะได้ $x = 4^t$ และ $f(g(x)) = 2^t = \sqrt{x}$ แต่ $g(x)$ นิยามเมื่อ $x > 0$ ดังนั้น $g(f(x)) = \frac{x}{2}$ โดเมน $\mathbb{R}$ และ $f(g(x)) = \sqrt{x}$ โดเมน $(0, \infty)$

สมบัติของลอการิทึม

เมื่อ $a > 0, a \neq 1$ และ $M, N > 0$ ลอการิทึมมีสมบัติที่ใช้อย่างนี้ ทุกข้อได้มาจากสมบัติของเลขยกกำลัง (เมื่อไม่เขียนฐาน $\log x$ หมายถึง $\log_{10} x$)

$$\log_a MN = \log_a M + \log_a N \text{ และ } \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

$$\log_a M^p = p \log_a M, \log_a a = 1, \log_a 1 = 0 \text{ และ } a^{\log_a M} = M$$

$$\text{เปลี่ยนฐาน } \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \text{ จึงได้ } \log_a b = \frac{1}{\log_b a} \text{ และ } \log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$$

$$\log_{a^q} M^p = \frac{p}{q} \log_a M \text{ และ } a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$$

ตัวอย่าง

กำหนด $\log 2 = a$ และ $\log 3 = b$ จงเขียน $\log_6 15$ ในรูปของ a และ b

วิธีทำ เปลี่ยนเป็นฐาน 10 และใช้ $\log 5 = \log \frac{10}{2} = 1 - a$

$$\log_6 15 = \frac{\log 3 + \log 5}{\log 2 + \log 3} = \frac{b + 1 - a}{a + b}$$

$$\text{ดังนั้น } \log_6 15 = \frac{1-a+b}{a+b}$$

ข้อควรระวัง $\log_a (M + N) \neq \log_a M + \log_a N$ และ $(\log_a M)^2 \neq 2 \log_a M$ สมบัติผลคูณใช้ได้กับผลคูณที่อยู่ภายใน $\log$ เท่านั้น

โจทย์

1. จงหาค่าของ

ก. $\log_6 4 + \log_6 9$

ข. $\log_2 40 - \log_2 5$

เฉลย ก. $\log_6 4 + \log_6 9 = \log_6 36 = 2$ ข.

$\log_2 40 - \log_2 5 = \log_2 8 = 3$

2. จงหาค่าของ $2 \log_3 6 - \log_3 4 + 7^{\log_7 5}$

เฉลย $2 \log_3 6 - \log_3 4 = \log_3 \frac{36}{4} = \log_3 9$

$= 2$ และ $7^{\log_7 5} = 5$ ดังนั้นค่าที่ต้องการคือ

$2 + 5 = 7$

3. จงหาค่าของ $\log_4 27 \cdot \log_9 32$

เฉลย $\log_4 27 = \log_{2^2} 3^3 = \frac{3}{2} \log_2 3$ และ

$\log_9 32 = \frac{5}{2} \log_3 2$ เนื่องจาก $\log_2 3 \cdot$

$\log_3 2 = 1$ ผลคูณจึงเท่ากับ $\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{4}$

5. จงหาค่าของ $3^{\log_2 7} - 7^{\log_2 3} + 4^{\log_8 27}$

เฉลย จาก $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ จะได้ $3^{\log_2 7} = 7^{\log_2 3}$ สองพจน์แรกจึงหักล้างกัน และ

$\log_8 27 = \log_{2^3} 3^3 = \log_2 3$ จึงได้ $4^{\log_2 3} = 3^{\log_2 4} = 9$ ดังนั้นคำตอบคือ 9

7. กำหนด $\log_2 3 = a$ และ $\log_3 5 = b$ จงเขียน

$\log_{15} 20$ ในรูปของ a และ b

เฉลย เปลี่ยนเป็นฐาน 3 โดย $\log_3 2 = \frac{1}{a}$ จะได้

$\log_{15} 20 = \frac{\log_3 4 + \log_3 5}{\log_3 3 + \log_3 5} = \frac{\frac{2}{1+b}}{1+b}$ คูณเศษและ

ส่วนด้วย a ได้ $\log_{15} 20 = \frac{2+ab}{a+ab}$

9. กำหนด $\log_{18} 24 = a$ จงเขียน $\log_{12} 54$ ในรูป
ของ a

เฉลย ให้ $t = \log_2 3$ เปลี่ยนเป็นฐาน 2 จะได้

$a = \frac{\log_2 24}{\log_2 18} = \frac{3+t}{1+2t}$ จัดรูปได้ $t = \frac{3-a}{2a-1}$ ต่อมา

$\log_{12} 54 = \frac{1+3t}{2+t}$ แทนค่า t แล้วคูณเศษและส่วน

ด้วย $2a-1$ ได้ $\frac{(2a-1)+3(3-a)}{2(2a-1)+(3-a)}$ ดังนั้น

$\log_{12} 54 = \frac{8-a}{3a+1}$

4. จงหาค่าของ $\frac{1}{\log_2 30} + \frac{1}{\log_3 30} + \frac{1}{\log_5 30}$

เฉลย จาก $\frac{1}{\log_a b} = \log_b a$ ผลบวกเท่ากับ

$\log_{30} 2 + \log_{30} 3 + \log_{30} 5 = \log_{30} 30 = 1$

6. จงหาค่าของ $\log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \dots \cdot$

$\log_{242} 243$

เฉลย ใช้ $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$ รวมตัว

ประกอบทีละคู่ต่อนั้นไปเรื่อย ๆ ผลคูณจึงเหลือ

$\log_3 243 = \log_3 3^5 = 5$

8. ถ้า $a > 1$ และ $\log_a b = 3$ จงหาค่าของ

$\log_{ab} \frac{b^2}{\sqrt{a}}$

เฉลย จาก $\log_a b = 3$ จะได้ $b = a^3$ จึงได้

$ab = a^4$ และ $\frac{b^2}{\sqrt{a}} = a^{6-\frac{1}{2}} = a^{\frac{11}{2}}$ ดังนั้น

$\log_{a^4} a^{\frac{11}{2}} = \frac{11}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{11}{8}$

10. ถ้า $\log_a b - \log_b a = 2$ เมื่อ $a, b > 0$ และ

$a, b \neq 1$ จงหาค่าของ $(\log_a b)^2 + (\log_b a)^2$

เฉลย ให้ $t = \log_a b$ จะได้ $\log_b a = \frac{1}{t}$ และ

$t - \frac{1}{t} = 2$ ดังนั้น $t^2 + \frac{1}{t^2} = \left(t - \frac{1}{t}\right)^2 + 2 = 4 + 2 = 6$

ลอการิทึมสามัญและลอการิทึมธรรมชาติ

ลอการิทึมสามัญ คือลอการิทึมฐาน 10 เขียน $\log x$ แทน $\log_{10} x$ ส่วนลอการิทึมธรรมชาติ คือลอการิทึมฐาน e เขียน $\ln x$ แทน $\log_e x$ เมื่อ $e \approx 2.718$

$\log 10^n = n$, $\ln e = 1$, $\ln e^k = k$ และ $e^{\ln x} = x$ เมื่อ $x > 0$ ถ้า $\log N = c$ เรียก N ว่าแอนติลอการิทึมของ c

ถ้า $N = m \times 10^n$ เมื่อ $1 \leq m < 10$ และ n เป็นจำนวนเต็ม จะได้ $\log N = n + \log m$ เรียก n ว่าแคแรกเทอริสติก และเรียก $\log m$ ซึ่ง $0 \leq \log m < 1$ ว่าแมนทิสซา

ถ้าแคแรกเทอริสติกเป็น $n \geq 0$ แล้ว N มีส่วนที่เป็นจำนวนเต็ม $n + 1$ หลัก ถ้าเป็น $-n$ ($n > 0$) ตัวเลขตัวแรกที่ไม่ใช่ศูนย์ของ N อยู่ที่ตำแหน่งทศนิยมที่ n

ตัวอย่าง

กำหนด $\log 2 \approx 0.3010$ และ $\log 3 \approx 0.4771$ จงหาค่าของ $\log 6000$ และ $\log 0.0006$

วิธีทำ $\log 6 = \log 2 + \log 3 \approx 0.7781$ และเขียน $6000 = 6 \times 10^3$, $0.0006 = 6 \times 10^{-4}$

$$\log 6000 \approx 3 + 0.7781 = 3.7781$$

$$\log 0.0006 \approx -4 + 0.7781 = -3.2219$$

แคแรกเทอริสติกคือ 3 และ -4 ตามลำดับ ส่วนแมนทิสซาเท่ากันคือ 0.7781

ข้อควรระวัง แมนทิสซาต้องอยู่ในช่วง $[0,1)$ เสมอ เช่น $\log 0.05 = \log 5 - 2 \approx -1.3010 = -2 + 0.6990$

จึงมีแคแรกเทอริสติกเป็น -2 ไม่ใช่ -1

โจทย์

1. จงหาค่าของ $\log 0.001 + \ln e^4 + e^{\ln 5}$

เฉลย $\log 0.001 = \log 10^{-3} = -3$, $\ln e^4 = 4$ และ $e^{\ln 5} = 5$ ดังนั้นค่าที่ต้องการคือ $-3 + 4 + 5 = 6$

2. จงหาแคแรกเทอริสติกของ $\log 523.4$ และของ $\log 0.00718$

เฉลย $523.4 = 5.234 \times 10^2$ จึงมีแคแรกเทอริสติกเป็น 2 และ $0.00718 = 7.18 \times 10^{-3}$ จึงมีแคแรกเทอริสติกเป็น -3

3. กำหนด $\log 3 \approx 0.4771$ จงหาจำนวน N และ M ที่ทำให้ $\log N = 2.4771$ และ $\log M = -1.5229$
เฉลย $\log N = 2 + 0.4771 \approx \log(3 \times 10^2)$
 จึงได้ $N \approx 300$ และ $\log M = -2 + 0.4771 \approx \log(3 \times 10^{-2})$ จึงได้ $M \approx 0.03$

5. กำหนด $\log 2 \approx 0.3010$ และ $\log 3 \approx 0.4771$ จงหาว่า 12^{30} มีกี่หลัก
เฉลย $\log 12 = 2 \log 2 + \log 3 \approx 1.0791$
 จึงได้ $\log 12^{30} \approx 30(1.0791) = 32.373$ แค
 แรกทอริสติกคือ 32 ดังนั้น 12^{30} มี 33 หลัก

7. กำหนด $\ln 2 \approx 0.6931$, $\ln 5 \approx 1.6094$ และ $\log 3 \approx 0.4771$ จงหาค่าประมาณของ $\log e$ (ทศนิยม 4 ตำแหน่ง) แล้วเปรียบเทียบ e^{30} กับ 3^{27} ว่าจำนวนใดมากกว่า
เฉลย $\log e = \frac{\ln e}{\ln 10} = \frac{1}{\ln 2 + \ln 5} \approx \frac{1}{2.3025} \approx 0.4343$ จึงได้ $\log e^{30} \approx 30(0.4343) = 13.029$ และ $\log 3^{27} \approx 27(0.4771) = 12.8817$ เนื่องจาก $\log$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ดังนั้น $e^{30} > 3^{27}$

4. กำหนด $\ln 2 \approx 0.6931$ และ $\ln 3 \approx 1.0986$ จงหาค่าประมาณของ $\ln 24$ และ $\ln \frac{e^2}{9}$
เฉลย $\ln 24 = 3 \ln 2 + \ln 3 \approx 2.0793 + 1.0986 = 3.1779$ และ $\ln \frac{e^2}{9} = \ln e^2 - 2 \ln 3 \approx 2 - 2.1972 = -0.1972$

6. กำหนด $\log 2 \approx 0.3010$ และ $\log 3 \approx 0.4771$ เมื่อเขียน $(0.6)^{25}$ เป็นทศนิยม ตัวเลขตัวแรกที่ไม่ใช่ศูนย์อยู่ที่ตำแหน่งทศนิยมที่เท่าใด
เฉลย $\log 0.6 = \log 6 - 1 \approx -0.2219$ จึงได้ $\log(0.6)^{25} \approx -5.5475 = -6 + 0.4525$ แค
 แรกทอริสติกคือ -6 ดังนั้นตัวเลขตัวแรกที่ไม่ใช่ศูนย์อยู่ที่ตำแหน่งทศนิยมที่ 6

8. กำหนด $\log 2 \approx 0.3010$, $\log 3 \approx 0.4771$ และ $\log 7 \approx 0.8451$ จงหาว่า 7^{40} มีกี่หลัก เลขโดดหลักซ้ายสุดคือเลขใด และเลขโดดหลักหน่วยคือเลขใด
เฉลย $\log 7^{40} \approx 40(0.8451) = 33.804$ จึงมี 34 หลัก แมนทิสซา 0.804 อยู่ระหว่าง $\log 6 \approx 0.7781$ กับ $\log 7 \approx 0.8451$ จึงได้ $7^{40} = m \times 10^{33}$ โดย $6 < m < 7$ หลักซ้ายสุดคือ 6 ส่วน $7^4 = 2401$ ลงท้ายด้วย 1 จึงได้ $7^{40} = (7^4)^{10}$ มีหลักหน่วยเป็น 1

โจทย์ผสม

1. กำหนด $f(x) = \log_2 x$ จงหาค่าของ $f(24) - f(3) + f(\sqrt{2}) + 2^{f(5)}$
- เฉลย** $f(24) - f(3) = \log_2 \frac{24}{3} = \log_2 8 = 3$, $f(\sqrt{2}) = \log_2 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$ และ $2^{f(5)} = 2^{\log_2 5} = 5$ ดังนั้นค่าที่ต้องการคือ $3 + \frac{1}{2} + 5 = \frac{17}{2}$

3. กำหนด $f(x) = \ln(2x - 1) + 3$ จงหาโดเมนของ f หา $f^{-1}(x)$ และหาค่าของ $f^{-1}(3)$
- เฉลย** ต้องมี $2x - 1 > 0$ จึงได้โดเมน $(\frac{1}{2}, \infty)$
ให้ $y = \ln(2x - 1) + 3$ จะได้ $2x - 1 = e^{y-3}$ หรือ $x = \frac{e^{y-3}+1}{2}$ ดังนั้น $f^{-1}(x) = \frac{e^{x-3}+1}{2}$ และ $f^{-1}(3) = \frac{e^0+1}{2} = 1$

5. จงหาค่า k ทั้งหมดที่ทำให้ $f(x) = \log_2(x^2 - 2kx + k + 6)$ มีโดเมนเป็น $\mathbb{R}$ และเมื่อ $k = 2$ จงหาเรนจ์ของ f
- เฉลย** ต้องมี $x^2 - 2kx + k + 6 > 0$ ทุก x นั่นคือ $4k^2 - 4(k + 6) < 0$ หรือ $(k - 3)(k + 2) < 0$ จึงได้ $-2 < k < 3$ เมื่อ $k = 2$ จะได้ $x^2 - 4x + 8 = (x - 2)^2 + 4 \geq 4$ และ $\log_2 x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม จึงได้เรนจ์ $[2, \infty)$

2. กำหนด $f(x) = \log(x - 1) + \log(x + 2)$ และ $g(x) = \log(x^2 + x - 2)$ จงหาโดเมนของ f และของ g แล้วบอกว่า f กับ g เป็นฟังก์ชันเดียวกันหรือไม่

เฉลย f ต้องมี $x - 1 > 0$ และ $x + 2 > 0$ จึงมีโดเมน $(1, \infty)$ ส่วน g ต้องมี $(x + 2)(x - 1) > 0$ จึงมีโดเมน $(-\infty, -2) \cup (1, \infty)$ แม้ $f(x) = g(x)$ ทุก $x > 1$ แต่โดเมนต่างกัน จึงไม่ใช่ฟังก์ชันเดียวกัน

4. โดยไม่ใช้ค่าประมาณของลอการิทึม จงเปรียบเทียบว่า $\log_2 3$ กับ $\log_3 5$ จำนวนใดมากกว่า

เฉลย จาก $3^2 = 9 > 8 = 2^3$ จะได้ $3 > 2^{\frac{3}{2}}$ และ $\log_2 x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม จึงได้ $\log_2 3 > \frac{3}{2}$ ทำนองเดียวกัน $5^2 = 25 < 27 = 3^3$ จะได้ $5 < 3^{\frac{3}{2}}$ จึงได้ $\log_3 5 < \frac{3}{2}$ ดังนั้น $\log_2 3 > \log_3 5$

6. จงหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของ $f(x) = \log_2(4x) \cdot \log_2 \frac{x}{2}$ เมื่อ $\frac{1}{4} \leq x \leq 8$ พร้อมทั้งค่า x ที่ให้ค่าเหล่านั้น

เฉลย ให้ $u = \log_2 x$ เนื่องจาก $\log_2 x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม จะได้ $-2 \leq u \leq 3$ และ $f = (u + 2)(u - 1) = \left(u + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$ ค่าต่ำสุดคือ $-\frac{9}{4}$ เมื่อ $u = -\frac{1}{2}$ คือ $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ส่วนค่าสูงสุดอยู่ที่ปลายช่วงซึ่งไกลจุดยอดกว่า คือ $u = 3$ ได้ค่าสูงสุด 10 เมื่อ $x = 8$

7. ถ้า 2^{2026} มี a หลัก และ 5^{2026} มี b หลัก จงหาค่าของ $a + b$ โดยไม่ใช้ค่าประมาณของลอการิทึม
- เฉลย 2^{2026} และ 5^{2026} ไม่ใช่กำลังของ 10 จึงได้ $a - 1 < \log 2^{2026} < a$ และ $b - 1 < \log 5^{2026} < b$ บวกกันได้ $a + b - 2 < \log 10^{2026} < a + b$ นั่นคือ $a + b - 2 < 2026 < a + b$ และ $a + b$ เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น $a + b = 2027$

9. จงหาโดเมนของ $f(x) = \ln(\log x) + \log(2 - \ln x)$
- เฉลย ต้องมี $\log x > 0$ จึงได้ $x > 1$ และต้องมี $2 - \ln x > 0$ หรือ $\ln x < 2$ เนื่องจาก $\ln x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม จึงได้ $x < e^2$ ดังนั้นโดเมนคือ $(1, e^2)$

11. ค่าสูงสุดลบด้วยค่าต่ำสุดของ $f(x) = \log_a x$ บนช่วง $[2, 8]$ เท่ากับ 2 จงหาค่า a ทั้งหมด
- เฉลย ค่าสูงสุดและต่ำสุดอยู่ที่ $x = 2$ กับ $x = 8$ เพราะ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือลด ผลต่างคือ $|\log_a 8 - \log_a 2| = |\log_a 4| = 2$ จึงได้ $a^2 = 4$ หรือ $a^{-2} = 4$ และ $a > 0$ ดังนั้น $a = 2$ หรือ $a = \frac{1}{2}$

8. ถ้า $\ln a = 2$ และ $\ln b = 3$ จงหาค่าของ

$$\log_a b^4 + \ln \frac{a^3}{eb}$$

เฉลย $\log_a b^4 = \frac{4 \ln b}{\ln a} = \frac{12}{2} = 6$ และ $\ln \frac{a^3}{eb} = 3 \ln a - \ln e - \ln b = 6 - 1 - 3 = 2$ ดังนั้นค่าที่ต้องการคือ $6 + 2 = 8$

10. ฟังก์ชัน f มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนจริงบวก และ $f(xy) = f(x) + f(y)$ ทุก $x, y > 0$ ถ้า $f(8) = 3$ จงหาค่าของ $f(\sqrt{2}) + f(\frac{1}{4})$
- เฉลย แทน $x = y = 1$ ได้ $f(1) = 0$ และ $f(8) = f(2) + f(4) = 3f(2)$ จึงได้ $f(2) = 1$ ต่อมา $2f(\sqrt{2}) = f(2)$ ได้ $f(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}$ และ $f(4) + f(\frac{1}{4}) = f(1) = 0$ ได้ $f(\frac{1}{4}) = -2$ ดังนั้นคำตอบคือ $-\frac{3}{2}$

12. มีจำนวนเต็ม n ตั้งแต่ 1 ถึง 100 ที่จำนวนที่ทำให้ $\log_8 n$ เป็นจำนวนตรรกยะ
- เฉลย ถ้า $\log_8 n = \frac{p}{q}$ เมื่อ p, q เป็นจำนวนเต็ม และ $q > 0$ จะได้ $n^q = 8^p = 2^{3p}$ จึงได้ $n = 2^k$ และกลับกัน $\log_8 2^k = \frac{k}{3}$ เป็นจำนวนตรรกยะเสมอ ดังนั้น $n = 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64$ มี 7 จำนวน

สมการเอกซ์โพเนนเชียลและสมการลอการิทึม

สมการเอกซ์โพเนนเชียล

สมการเอกซ์โพเนนเชียล คือสมการที่มีตัวแปรอยู่ในเลขชี้กำลัง เช่น $3^{x+1} = 81$ หรือ $4^x - 2^x = 12$ หลักที่ใช้แก้คือ $y = a^x$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง จึงเทียบเลขชี้กำลังได้เมื่อฐานเท่ากัน

เมื่อ $a > 0$ และ $a \neq 1$ จะได้ $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

ถ้าทำฐานให้เท่ากันไม่ได้ ให้ใส่ $\log$ ทั้งสองข้าง $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b = \frac{\log b}{\log a}$ (เมื่อ $b > 0$)

ลักษณะของสมการ	วิธีแก้
มี a^{x+k} หลายพจน์บวกกัน	ดึงกำลังที่ต่ำที่สุดเป็นตัวร่วม
มี a^{2x} และ a^x	ให้ $u = a^x$ โดย $u > 0$ แล้วแก้สมการกำลังสอง
$p \cdot a^{2x} + q \cdot (ab)^x + r \cdot b^{2x} = 0$	หารด้วย b^{2x} แล้วให้ $t = \left(\frac{a}{b}\right)^x$
$h^{f(x)} = h^{g(x)}$ เมื่อฐาน $h > 0$ มีตัวแปร	แยกกรณี $h = 1$ กับกรณี $f(x) = g(x)$

ข้อควรระวัง $u = a^x$ เป็นบวกเสมอ ค่า u ที่เป็นศูนย์หรือลบต้องตัดทิ้ง และถ้าฐานเป็นนิพจน์ของ x ต้องตรวจกรณีฐานเท่ากับ 1 แยกต่างหาก เพราะ 1 ยกกำลังอะไรก็ได้ 1

ตัวอย่าง

จงแก้สมการ $4^x - 2^{x+1} - 8 = 0$

วิธีทำ เขียน $4^x = (2^x)^2$ และ $2^{x+1} = 2 \cdot 2^x$ แล้วให้ $u = 2^x$ โดย $u > 0$ จะได้

$$u^2 - 2u - 8 = 0$$

แยกตัวประกอบได้ $(u - 4)(u + 2) = 0$ จึงได้ $u = 4$ หรือ $u = -2$ แต่ $u > 0$ จึงตัด $u = -2$ ทิ้ง

ดังนั้น $2^x = 4 = 2^2$ นั่นคือ $x = 2$

โจทย์

1. จงแก้สมการ $9^{x+1} = 27^{x-1}$

เฉลย เขียนเป็นฐาน 3 ได้ $3^{2x+2} = 3^{3x-3}$

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลเป็นหนึ่งต่อหนึ่ง จึงได้

$$2x + 2 = 3x - 3 \text{ ดังนั้น } x = 5$$

2. จงแก้สมการ $\left(\frac{1}{8}\right)^x = 16\sqrt{2}$

เฉลย ฝั่งซ้ายคือ 2^{-3x} ฝั่งขวาคือ $2^4 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{9}{2}}$

จึงได้ $-3x = \frac{9}{2}$ ดังนั้น $x = -\frac{3}{2}$

3. จงแก้สมการ $2^{x+2} + 2^{x-1} = 72$

เฉลย ดึง 2^{x-1} เป็นตัวร่วม ได้ $2^{x-1}(2^3 + 1) = 72$ หรือ $9 \cdot 2^{x-1} = 72$ จึงได้ $2^{x-1} = 8 = 2^3$ ดังนั้น $x - 1 = 3$ นั่นคือ $x = 4$

5. กำหนด $\log 2 \approx 0.3010$ และ $\log 3 \approx 0.4771$ จงแก้สมการ $2^{x+1} = 3^{x-1}$ (ตอบเป็นทศนิยม 2 ตำแหน่ง)

เฉลย ใส่ $\log$ ทั้งสองข้าง $(x+1)\log 2 = (x-1)\log 3$ จัดรูปได้ $x(\log 3 - \log 2) = \log 3 + \log 2$ ดังนั้น $x = \frac{\log 3 + \log 2}{\log 3 - \log 2} = \frac{0.7781}{0.1761} \approx 4.42$

7. จงหาเซตคำตอบของสมการ $2 \cdot 4^x - 5 \cdot 6^x + 3 \cdot 9^x = 0$

เฉลย หารด้วย $4^x > 0$ และให้ $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x > 0$ จะได้ $3t^2 - 5t + 2 = 0$ หรือ $(3t-2)(t-1) = 0$ ได้ $t = 1$ หรือ $t = \frac{2}{3}$ จึงได้ $x = 0$ หรือ $x = -1$ เซตคำตอบคือ $\{-1, 0\}$

4. จงแก้สมการ $3^{2x+1} - 26 \cdot 3^x - 9 = 0$

เฉลย ให้ $u = 3^x > 0$ จะได้ $3u^2 - 26u - 9 = 0$ หรือ $(3u+1)(u-9) = 0$ ได้ $u = 9$ ส่วน $u = -\frac{1}{3}$ ต้องตัดทิ้งเพราะ $u > 0$ ดังนั้น $3^x = 9$ นั่นคือ $x = 2$

6. จงแก้ระบบสมการ $2^x + 3^y = 17$ และ $2^{x+2} - 3^{y+1} = 5$

เฉลย ให้ $a = 2^x$ และ $b = 3^y$ จะได้ $a + b = 17$ และ $4a - 3b = 5$ นำ 3 คูณสมการแรกแล้วบวกกันได้ $7a = 56$ จึงได้ $a = 8$ และ $b = 9$ ดังนั้น $x = 3$ และ $y = 2$

8. จงหาเซตคำตอบของสมการ $(x^2 - 4x + 5)^{x^2} = (x^2 - 4x + 5)^{3x+4}$

เฉลย ฐาน $x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1 \geq 1$ เป็นบวกเสมอ กรณีฐานเท่ากับ 1 คือ $x = 2$ ทั้งสองข้างเป็น 1 ใช้ได้ กรณีฐานไม่เท่ากับ 1 ต้องได้ $x^2 = 3x + 4$ ได้ $x = 4$ หรือ $x = -1$ เซตคำตอบคือ $\{-1, 2, 4\}$

9. จงหาเซตคำตอบของสมการ $(\sqrt{5+2\sqrt{6}})^x + (\sqrt{5-2\sqrt{6}})^x = 10$

เฉลย สังเกตว่า $\sqrt{5+2\sqrt{6}} \cdot \sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{25-24} = 1$ ให้ $t = (\sqrt{5+2\sqrt{6}})^x > 0$ จะได้ $(\sqrt{5-2\sqrt{6}})^x = \frac{1}{t}$ สมการกลายเป็น $t + \frac{1}{t} = 10$ หรือ $t^2 - 10t + 1 = 0$ ได้ $t = 5 \pm 2\sqrt{6}$ ซึ่งเท่ากับ $(\sqrt{5+2\sqrt{6}})^2$ หรือ $(\sqrt{5+2\sqrt{6}})^{-2}$ จึงได้ $x = 2$ หรือ $x = -2$ เซตคำตอบคือ $\{-2, 2\}$

11. จงหาเซตคำตอบของสมการ $27^{\frac{1}{x}} = 9^{x+\frac{1}{2}}$

เฉลย เงื่อนไข $x \neq 0$ เขียนเป็นฐาน 3 ได้ $3^{\frac{3}{x}} = 3^{2x+1}$ จึงได้ $\frac{3}{x} = 2x+1$ หรือ $2x^2 + x - 3 = 0$ แยกตัวประกอบได้ $(2x+3)(x-1) = 0$ เซตคำตอบคือ $\{-\frac{3}{2}, 1\}$

13. จงหาเซตคำตอบของสมการ $6^x + 6 = 2^{x+1} + 3^{x+1}$

เฉลย ย้ายข้างแล้วจับกลุ่ม $2^x \cdot 3^x - 2 \cdot 2^x - 3 \cdot 3^x + 6 = 2^x(3^x - 2) - 3(3^x - 2) = (2^x - 3)(3^x - 2) = 0$ จึงได้ $2^x = 3$ หรือ $3^x = 2$ เซตคำตอบคือ $\{\log_3 2, \log_2 3\}$

10. จงแก้สมการ $2^{x+3} \cdot 3^x = 12^x$

เฉลย ฝั่งซ้ายคือ $8 \cdot 2^x \cdot 3^x = 8 \cdot 6^x$ ทหารทั้ง สองข้างด้วย $6^x > 0$ ได้ $8 = \left(\frac{12}{6}\right)^x = 2^x$ ดังนั้น $x = 3$

12. จงแก้ระบบสมการ $2^x \cdot 3^y = 48$ และ $3^x \cdot$

$2^y = 162$

เฉลย คูณสองสมการได้ $6^{x+y} = 7776 = 6^5$ จึงได้ $x+y = 5$ นำสมการแรกหารด้วยสมการที่สองได้ $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-y} = \frac{48}{162} = \frac{8}{27} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$ จึงได้ $x - y = 3$ ดังนั้น $x = 4$ และ $y = 1$

14. จงหาเซตคำตอบของสมการ $4(8^x + 8^{-x}) = 13(2^x + 2^{-x})$

เฉลย ให้ $t = 2^x + 2^{-x} > 0$ จะได้ $t^3 = 8^x + 8^{-x} + 3t$ สมการกลายเป็น $4(t^3 - 3t) = 13t$ หรือ $t(4t^2 - 25) = 0$ เนื่องจาก $t > 0$ จึงได้ $t = \frac{5}{2}$ นั่นคือ $2^x + 2^{-x} = \frac{5}{2}$ ได้ $2^x = 2$ หรือ $2^x = \frac{1}{2}$ เซตคำตอบคือ $\{-1, 1\}$

สมการลอการิทึม

สมการลอการิทึม คือสมการที่มีตัวแปรอยู่ในลอการิทึม ก่อนแก้ต้องเขียนเงื่อนไขโดเมน คือสิ่งที่อยู่หลัง $\log$ ต้องเป็นบวก และถ้าฐานมีตัวแปร ฐานต้องเป็นบวกและไม่เท่ากับ 1

$$\log_a f(x) = c \Leftrightarrow f(x) = a^c$$

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) \text{ เมื่อ } f(x) > 0 \text{ และ } g(x) > 0$$

รวมเป็น $\log$ เดียวด้วย $\log_a M + \log_a N = \log_a MN$ และ $\log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N}$ ทำฐานให้เท่ากันด้วย $\log_{a^k} M = \frac{1}{k} \log_a M$ ถ้ามี $\log$ รูปเดียวกันหลายตัวให้แทนด้วย $u = \log_a x$

ตรวจคำตอบทุกครั้ง การรวม $\log_a M + \log_a N$ เป็น $\log_a MN$ ทำให้โดเมนกว้างขึ้น เพราะถ้า M และ N เป็นลบทั้งคู่ก็ยังได้ $MN > 0$ จึงอาจได้คำตอบเกิน ต้องนำคำตอบไปเทียบกับเงื่อนไขโดเมนของสมการเดิมเสมอ

ตัวอย่าง

จงแก้สมการ $\log_2(x-2) + \log_2(x+5) = 3$

วิธีทำ เงื่อนไข $x-2 > 0$ และ $x+5 > 0$ นั่นคือ $x > 2$ รวม $\log$ ได้

$$\log_2((x-2)(x+5)) = 3$$

จึงได้ $(x-2)(x+5) = 2^3 = 8$ หรือ $x^2 + 3x - 18 = 0$ แยกตัวประกอบได้ $(x+6)(x-3) = 0$

ได้ $x = 3$ หรือ $x = -6$ แต่ $x = -6$ ขัดกับ $x > 2$ ดังนั้นคำตอบคือ $x = 3$

โจทย์

1. จงแก้สมการ $\log_5(2x+3) = 2$

เฉลย เงื่อนไข $2x+3 > 0$ จากนิยามได้ $2x+3 = 5^2 = 25$ จึงได้ $x = 11$ ตรวจสอบ $2(11)+3 = 25 > 0$ ใช้ได้ ดังนั้น $x = 11$

2. จงแก้สมการ $\log_x \frac{1}{27} = -\frac{3}{2}$

เฉลย เงื่อนไข $x > 0$ และ $x \neq 1$ จากนิยามได้ $x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{27}$ หรือ $x^{\frac{3}{2}} = 27$ จึงได้ $x = 27^{\frac{2}{3}} = 9$ ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไข ดังนั้น $x = 9$

3. จงหาเซตคำตอบของสมการ $\log_5(x^2 - 4x) = \log_5(x + 6)$

เฉลย ได้ $x^2 - 4x = x + 6$ หรือ $(x - 6)(x + 1) = 0$ จึงได้ $x = 6$ หรือ $x = -1$
 ตรวจสอบ $x = 6$ ได้ $12 > 0$ ทั้งสองข้าง และ $x = -1$ ได้ $5 > 0$ ทั้งสองข้าง ใช้ได้ทั้งคู่ เซตคำตอบคือ $\{-1, 6\}$

5. จงแก้สมการ $\log_2(x - 1) = \log_4(x + 11)$

เฉลย เงื่อนไข $x > 1$ เปลี่ยนฐาน $\log_4(x + 11) = \frac{1}{2}\log_2(x + 11)$ จะได้ $2\log_2(x - 1) = \log_2(x + 11)$ จึงได้ $(x - 1)^2 = x + 11$ หรือ $(x - 5)(x + 2) = 0$ ตัด $x = -2$ ทิ้ง เพราะ $x > 1$ ดังนั้น $x = 5$

7. จงหาเซตคำตอบของสมการ $x^{\log_2 x} = 8x^2$

เฉลย เงื่อนไข $x > 0$ ใส่ $\log_2$ ทั้งสองข้างและให้ $u = \log_2 x$ จะได้ $u^2 = 3 + 2u$ หรือ $(u - 3)(u + 1) = 0$ จึงได้ $x = 8$ หรือ $x = \frac{1}{2}$
 ตรวจสอบ $8^3 = 512 = 8 \cdot 8^2$ และ $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2 = 8 \cdot \frac{1}{4}$ เซตคำตอบคือ $\{\frac{1}{2}, 8\}$

4. จงแก้สมการ $2\log_2 x - \log_2(x + 4) = 1$

เฉลย เงื่อนไข $x > 0$ เขียนได้ $\log_2 \frac{x^2}{x+4} = 1$ จึงได้ $x^2 = 2(x + 4)$ หรือ $(x - 4)(x + 2) = 0$ ได้ $x = 4$ หรือ $x = -2$ แต่ $x > 0$ จึงตัด -2 ทิ้ง ดังนั้น $x = 4$

6. จงหาเซตคำตอบของสมการ $\log_3 x \cdot \log_3(9x) = 8$

เฉลย เงื่อนไข $x > 0$ ให้ $u = \log_3 x$ จะได้ $\log_3(9x) = 2 + u$ สมการกลายเป็น $u(u + 2) = 8$ หรือ $(u + 4)(u - 2) = 0$ ได้ $u = 2$ หรือ $u = -4$ จึงได้ $x = 9$ หรือ $x = \frac{1}{81}$ ซึ่งเป็นบวกทั้งคู่ เซตคำตอบคือ $\{\frac{1}{81}, 9\}$

8. จงหาเซตคำตอบของสมการ $\log_2(3 \cdot 2^x - 8) = 2x - 2$

เฉลย จากนิยามได้ $3 \cdot 2^x - 8 = 2^{2x-2} = \frac{(2^x)^2}{4}$ ให้ $u = 2^x$ จะได้ $u^2 - 12u + 32 = 0$ หรือ $(u - 4)(u - 8) = 0$ จึงได้ $x = 2$ หรือ $x = 3$ ตรวจสอบ $3 \cdot 2^x - 8$ มีค่า 4 และ 16 เป็นบวกทั้งคู่ เซตคำตอบคือ $\{2, 3\}$

9. จงแก้ระบบสมการ $\log_x y + 2 \log_y x = 3$ และ $x^2 + y = 20$

เฉลย เงื่อนไข $x, y > 0$ และ $x, y \neq 1$ ให้ $t = \log_x y$ จะได้ $\log_y x = \frac{1}{t}$ และ $t + \frac{2}{t} = 3$ หรือ $(t-1)(t-2) = 0$ กรณี $t = 1$ ได้ $y = x$ แทนได้ $x^2 + x - 20 = 0$ ได้ $x = 4$ (ตัด -5 ทิ้ง) กรณี $t = 2$ ได้ $y = x^2$ แทนได้ $2x^2 = 20$ ได้ $x = \sqrt{10}$ และ $y = 10$ ดังนั้น $(x, y) = (4, 4)$ หรือ $(\sqrt{10}, 10)$

โจทย์ผสม

1. จงแก้สมการ $\log_3(3^x + 18) = x + 1$

เฉลย จากนิยามได้ $3^x + 18 = 3^{x+1} = 3 \cdot 3^x$ จึงได้ $2 \cdot 3^x = 18$ หรือ $3^x = 9$ ตรวจสอบ $3^2 + 18 = 27 > 0$ ใช้ได้ ดังนั้น $x = 2$

3. จงแก้ระบบสมการ $2^x \cdot 8^y = 128$ และ

$$\log_2 x + \log_2 y = 1$$

เฉลย สมการแรกคือ $2^{x+3y} = 2^7$ ได้ $x + 3y = 7$ สมการที่สองได้ $xy = 2$ โดย $x, y > 0$ แทน $x = 7 - 3y$ ได้ $3y^2 - 7y + 2 = 0$ หรือ $(3y-1)(y-2) = 0$ ดังนั้น $(x, y) = (1, 2)$ หรือ $(6, \frac{1}{3})$

2. จงแก้สมการ $4^{\log_2 x} - 3x = 10$

เฉลย เงื่อนไข $x > 0$ เนื่องจาก $4^{\log_2 x} = (2^{\log_2 x})^2 = x^2$ สมการกลายเป็น $x^2 - 3x - 10 = 0$ หรือ $(x-5)(x+2) = 0$ ตัด $x = -2$ ทิ้งเพราะ $x > 0$ ดังนั้น $x = 5$

4. จงหาค่า k ที่ทำให้สมการ $\log_2(4^x + 16) = x + \log_2 k$ มีคำตอบเพียงคำตอบเดียว และหาคำตอบนั้น

เฉลย ต้องมี $k > 0$ สมการสมมูลกับ $4^x + 16 = k \cdot 2^x$ ให้ $u = 2^x > 0$ ได้ $u^2 - ku + 16 = 0$ ผลคูณรากเป็น 16 และผลบวกเป็น $k > 0$ รากจึงเป็นบวกทั้งคู่ มี x ค่าเดียวเมื่อรากซ้ำ คือ $k^2 = 64$ ได้ $k = 8$ และ $u = 4$ ดังนั้น $k = 8$ และ $x = 2$

5. จงหาเซตคำตอบของสมการ $\log_2 x + \log_5 x = \log_2 x \cdot \log_5 x$

เฉลย เงื่อนไข $x > 0$ ถ้า $x = 1$ ทั้งสองข้างเป็น 0 จึงเป็นคำตอบ ถ้า $x \neq 1$ หารด้วย $\log_2 x \cdot \log_5 x$ ได้ $\frac{1}{\log_5 x} + \frac{1}{\log_2 x} = 1$ หรือ $\log_x 5 + \log_x 2 = \log_x 10 = 1$ จึงได้ $x = 10$ เซตคำตอบคือ $\{1, 10\}$

7. จงหาเซตคำตอบของสมการ $\log_{2x} 4 + \log_{4x} 16 = 4$

เฉลย เงื่อนไข $x > 0, x \neq \frac{1}{2}$ และ $x \neq \frac{1}{4}$ ให้ $t = \log_2 x$ เปลี่ยนเป็นฐาน 2 ได้ $\frac{2}{1+t} + \frac{4}{2+t} = 4$ คูณตลอดได้ $6t + 8 = 4(t^2 + 3t + 2)$ หรือ $2t(2t + 3) = 0$ ได้ $t = 0$ หรือ $t = -\frac{3}{2}$ จึงได้ $x = 1$ หรือ $x = 2^{-\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ ซึ่งไม่ทำให้ฐานเป็น 1 เซตคำตอบคือ $\{\frac{\sqrt{2}}{4}, 1\}$

9. จงหาผลบวกของคำตอบทั้งหมดของสมการ $4^x - 7 \cdot 2^x + 5 = 0$

เฉลย ให้ $u = 2^x$ ได้ $u^2 - 7u + 5 = 0$ ซึ่งมีรากจริงสองค่า (ดิสคริมีแนนต์ 29) ผลบวก 7 และผลคูณ 5 รากจึงเป็นบวกทั้งคู่ ถ้าคำตอบคือ x_1, x_2 จะได้ $2^{x_1} \cdot 2^{x_2} = 5$ หรือ $2^{x_1+x_2} = 5$ ดังนั้น $x_1 + x_2 = \log_2 5$

6. จงหาเซตคำตอบของสมการ $\log_2(x^2 - 3) = \log_3(x^2 + 2)$

เฉลย ให้ทั้งสองข้างเท่ากับ t จะได้ $x^2 - 3 = 2^t$ และ $x^2 + 2 = 3^t$ ลบกันได้ $3^t - 2^t = 5$ ถ้า $t \leq 0$ ฝั่งซ้ายไม่เป็นบวก ถ้า $t > 0$ ฝั่งซ้ายเท่ากับ $2^t \left(\left(\frac{3}{2} \right)^t - 1 \right)$ ซึ่งเพิ่มขึ้นตาม t จึงมีคำตอบเดียวคือ $t = 2$ ได้ $x^2 = 7$ (ตรวจ $x^2 - 3 = 4 > 0$) เซตคำตอบคือ $\{-\sqrt{7}, \sqrt{7}\}$

8. จงแก้สมการ $\log_2(\log_3(9^x - 3^x + 3)) = 1$

เฉลย จากนิยามได้ $\log_3(9^x - 3^x + 3) = 2$ จึงได้ $9^x - 3^x + 3 = 9$ ให้ $u = 3^x > 0$ ได้ $u^2 - u - 6 = 0$ หรือ $(u - 3)(u + 2) = 0$ ตัด $u = -2$ ทิ้ง จึงได้ $3^x = 3$ ดังนั้น $x = 1$

10. จงหาเซตคำตอบของสมการ $2^x - 1 = \log_2(x + 1)$

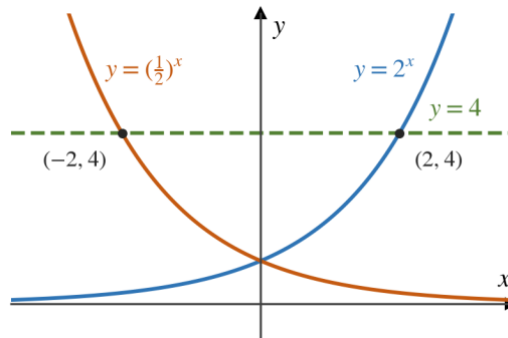
เฉลย เงื่อนไข $x > -1$ ให้ $y = 2^x - 1$ จะได้ $y = \log_2(x + 1)$ หรือ $x = 2^y - 1$ ถ้า $x > y$ จะได้ $y = 2^x - 1 > 2^y - 1 = x$ ขัดแย้ง ทำนองเดียวกัน $x < y$ ก็ขัดแย้ง จึงได้ $x = y$ นั่นคือ $2^x = x + 1$ กราฟ $y = 2^x$ โค้งหงายจึงตัดเส้นตรงได้ไม่เกิน 2 จุด และ $x = 0, 1$ สอดคล้อง เซตคำตอบคือ $\{0, 1\}$

อสมการเอกซ์โพเนนเชียลและอสมการลอการิทึม

อสมการเอกซ์โพเนนเชียล

อสมการเอกซ์โพเนนเชียล คืออสมการที่มีตัวแปรอยู่ในเลขชี้กำลัง วิธีหลักคือจัดทั้งสองข้างให้เป็นฐานเดียวกัน แล้วเปรียบเทียบเลขชี้กำลัง โดยดูว่าฐานมากกว่า 1 (ฟังก์ชันเพิ่ม) หรืออยู่ระหว่าง 0 กับ 1 (ฟังก์ชันลด) เช่น จากกราฟ

$$2^x > 4 \text{ เมื่อ } x > 2 \text{ แต่ } \left(\frac{1}{2}\right)^x > 4 \text{ เมื่อ } x < -2$$



ถ้า $a > 1$ แล้ว $a^u < a^v \Leftrightarrow u < v$ (เครื่องหมายคงเดิม)

ถ้า $0 < a < 1$ แล้ว $a^u < a^v \Leftrightarrow u > v$ (กลับเครื่องหมาย)

ถ้าฐานต่างกัน ให้ใส่ $\log$ ทั้งสองข้าง เช่น $a^x < b \Leftrightarrow x \log a < \log b$ เมื่อ $b > 0$ (เครื่องหมายคงเดิม เพราะ $\log$ ฐาน 10 เป็นฟังก์ชันเพิ่ม)

ตัวอย่าง

จงแก้สมการ $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-4} \geq 3^{3x}$

วิธีทำ เขียนทั้งสองข้างเป็นฐาน $\frac{1}{3}$ โดย $3^{3x} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3x}$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-4} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{-3x}$$

ฐาน $\frac{1}{3}$ อยู่ระหว่าง 0 กับ 1 จึงกลับเครื่องหมาย ได้ $x^2 - 4 \leq -3x$

$$x^2 + 3x - 4 \leq 0 \Rightarrow (x + 4)(x - 1) \leq 0$$

ดังนั้นเซตคำตอบคือ $[-4, 1]$

ข้อควรระวัง เมื่อแทน $u = a^x$ ต้องจำว่า $u > 0$ เสมอ ถ้าแก้ได้ $u < -1$ หรือ $u > 3$ ช่วง $u < -1$ ต้องตัดทิ้งเหลือ $a^x > 3$ และเมื่อหารด้วยจำนวนลบ เช่น $\log 0.5$ ต้องกลับเครื่องหมายด้วย

ข้อสังเกต เมื่อ $a > 0$ จะได้ $a^x > 0$ ทุกจำนวนจริง x ดังนั้น $2^x > -5$ จริงทุก x (เซตคำตอบคือ $\mathbb{R}$) ส่วน $3^x \leq 0$ ไม่มีคำตอบ (เซตคำตอบคือ $\emptyset$) ถ้าข้างหนึ่งไม่เป็นบวก ห้ามใส่ $\log$ ทั้งสองข้าง

โจทย์

1. จงแก้สมการ $2^{3x-1} > 32$

เฉลย เขียน $32 = 2^5$ ได้ $2^{3x-1} > 2^5$ ฐาน 2 มากกว่า 1 เครื่องหมายคงเดิม จึงได้ $3x - 1 > 5$ หรือ $x > 2$ ดังนั้นเซตคำตอบคือ $(2, \infty)$

3. จงแก้สมการ $5^{x^2+x} \leq 25^{x+3}$

เฉลย $25^{x+3} = 5^{2x+6}$ ฐาน 5 มากกว่า 1 จึงได้ $x^2 + x \leq 2x + 6$ หรือ $x^2 - x - 6 \leq 0$ แยกตัวประกอบได้ $(x - 3)(x + 2) \leq 0$ ดังนั้นเซตคำตอบคือ $[-2, 3]$

5. จงแก้สมการ $3^{x+1} - 3^{1-x} \geq 8$

เฉลย ให้ $u = 3^x > 0$ ได้ $3u - \frac{3}{u} \geq 8$ คูณด้วย u ได้ $3u^2 - 8u - 3 \geq 0$ หรือ $(3u + 1)(u - 3) \geq 0$ ช่วง $u \leq -\frac{1}{3}$ ใช้ไม่ได้เพราะ $u > 0$ จึงเหลือ $3^x \geq 3$ ดังนั้นเซตคำตอบคือ $[1, \infty)$

2. จงแก้สมการ $(0.25)^x < 8$

เฉลย เขียนเป็นฐาน 2 โดย $0.25 = 2^{-2}$ และ $8 = 2^3$ ได้ $2^{-2x} < 2^3$ ฐาน 2 มากกว่า 1 จึงได้ $-2x < 3$ หาด้วย -2 ต้องกลับเครื่องหมาย ได้ $x > -\frac{3}{2}$ ดังนั้นเซตคำตอบคือ $(-\frac{3}{2}, \infty)$

4. จงแก้สมการ $(\frac{2}{3})^{2x-1} > (\frac{9}{4})^{x-3}$

เฉลย $\frac{9}{4} = (\frac{2}{3})^{-2}$ จึงได้ $(\frac{9}{4})^{x-3} = (\frac{2}{3})^{6-2x}$ ฐาน $\frac{2}{3}$ อยู่ระหว่าง 0 กับ 1 ต้องกลับเครื่องหมาย ได้ $2x - 1 < 6 - 2x$ หรือ $x < \frac{7}{4}$ ดังนั้นเซตคำตอบคือ $(-\infty, \frac{7}{4})$

6. ปลอยลูกบอลจากความสูง h ทุกครั้งที่ตกกระทบพื้น ลูกบอลจะกระดอนขึ้นสูงเป็น 60% ของครั้งก่อน จงหาจำนวนเต็ม n ที่น้อยที่สุดที่การกระดอนครั้งที่ n สูงน้อยกว่า 0.1% ของ h กำหนด $\log 2 \approx 0.3010$ และ $\log 3 \approx 0.4771$

เฉลย ต้องการ $(0.6)^n < 0.001$ ใส่ $\log$ ได้ $n \log 0.6 < -3$ โดย $\log 0.6 = \log 2 + \log 3 - 1 \approx -0.2219$ เป็นลบ หาดแล้วต้องกลับเครื่องหมาย ได้ $n > \frac{3}{0.2219} \approx 13.5$ ดังนั้น $n = 14$

7. จงแก้สมการ $3^{|x-2|} < 9^{x-1}$

เฉลย $9^{x-1} = 3^{2x-2}$ ฐาน 3 มากกว่า 1 จึงได้
 $|x-2| < 2x-2$ หรือ $-(2x-2) < x-2 < 2x-2$ ต้องจริงทั้งสองข้าง ข้างซ้ายให้ $x > \frac{4}{3}$ ข้างขวาให้ $x > 0$ ดังนั้นเซตคำตอบคือ $(\frac{4}{3}, \infty)$

9. จงแก้สมการ $5^{x+1} - 5^{x-1} \geq 120$

เฉลย ดึง 5^{x-1} ออกมาได้ $5^{x-1}(25-1) \geq 120$ หรือ $5^{x-1} \geq 5$ ฐาน 5 มากกว่า 1 จึงได้
 $x-1 \geq 1$ ดังนั้นเซตคำตอบคือ $[2, \infty)$

11. จงแก้สมการ $2^{3x} > 3^{x+2}$ โดยตอบในรูป
 ลอการิทึม

เฉลย $2^{3x} = 8^x$ และ $3^{x+2} = 9 \cdot 3^x$ หารด้วย
 $3^x > 0$ ได้ $(\frac{8}{3})^x > 9$ ฐาน $\frac{8}{3}$ มากกว่า 1 จึงได้
 $x > \log_{\frac{8}{3}} 9$ ดังนั้นเซตคำตอบคือ $(\log_{\frac{8}{3}} 9, \infty)$

13. จงแก้สมการ $4^x + 6^x < 2 \cdot 9^x$

เฉลย หารด้วย $9^x > 0$ แล้วให้ $t = (\frac{2}{3})^x > 0$
 ได้ $t^2 + t - 2 < 0$ หรือ $(t+2)(t-1) < 0$
 เนื่องจาก $t > 0$ จึงเหลือ $t < 1$ คือ $(\frac{2}{3})^x < 1$
 ฐานน้อยกว่า 1 ต้องกลับเครื่องหมาย ได้ $x > 0$
 ดังนั้นเซตคำตอบคือ $(0, \infty)$

8. จงแก้สมการ $(x^2 - x + 1)^{x+2} < 1$

เฉลย ฐาน $x^2 - x + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$
 เสมอ และ $1 = (x^2 - x + 1)^0$ แยกกรณี ถ้า
 ฐานมากกว่า 1 คือ $x < 0$ หรือ $x > 1$ ต้องมี
 $x+2 < 0$ ได้ $x < -2$ ถ้าฐานอยู่ระหว่าง 0 กับ
 1 คือ $0 < x < 1$ ต้องมี $x+2 > 0$ ซึ่งจริงทั้ง
 ช่วง ถ้าฐานเท่ากับ 1 ($x = 0, 1$) ได้ $1 < 1$ เป็น
 เท็จ ดังนั้นเซตคำตอบคือ $(-\infty, -2) \cup (0, 1)$

10. จงแก้สมการ $\frac{1}{2} < 2^{x^2-2x} \leq 8$

เฉลย ฐาน 2 มากกว่า 1 จึงได้ $-1 < x^2 - 2x \leq 3$ ข้างซ้ายคือ $(x-1)^2 > 0$ ได้ $x \neq 1$
 ข้างขวาคือ $(x-3)(x+1) \leq 0$ ได้ $-1 \leq x \leq 3$ ดังนั้นเซตคำตอบคือ $[-1, 1) \cup (1, 3]$

12. จงแก้สมการ $2^x + 3^x < 13$

เฉลย ให้ $f(x) = 2^x + 3^x$ เป็นผลบวกของ
 ฟังก์ชันเพิ่มสองฟังก์ชัน จึงเป็นฟังก์ชันเพิ่ม และ
 $f(2) = 4 + 9 = 13$ สมการคือ $f(x) < f(2)$ ซึ่งจริงเมื่อ $x < 2$ เท่านั้น ดังนั้นเซตคำตอบ
 คือ $(-\infty, 2)$

อสมการลอการิทึม

อสมการลอการิทึม คืออสมการที่มีตัวแปรอยู่ในลอการิทึม ขั้นแรกต้องหาโดเมนก่อนเสมอ คือสิ่งที่อยู่ในลอการิทึมต้องเป็นบวก (ถ้าฐานมีตัวแปร ฐานต้องเป็นบวกและไม่เท่ากับ 1) จากนั้นจึงเปรียบเทียบตามฐาน แล้วนำคำตอบไปตัดกับโดเมน

ถ้า $a > 1$ แล้ว $\log_a u < \log_a v \Leftrightarrow 0 < u < v$

ถ้า $0 < a < 1$ แล้ว $\log_a u < \log_a v \Leftrightarrow u > v > 0$ (กลับเครื่องหมาย)

เขียนค่าคงที่เป็นลอการิทึมฐานเดียวกัน $c = \log_a a^c$ เช่น $3 = \log_2 8$ และ $-2 = \log_{\frac{1}{3}} 9$

ตัวอย่าง

จงแก้สมการ $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) + \log_{\frac{1}{2}}(x+1) \geq -3$

วิธีทำ หาโดเมนก่อน: $x-1 > 0$ และ $x+1 > 0$ จึงได้ $x > 1$

รวมลอการิทึม และเขียน $-3 = \log_{\frac{1}{2}} 8$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 1) \geq \log_{\frac{1}{2}} 8$$

ฐาน $\frac{1}{2}$ น้อยกว่า 1 จึงกลับเครื่องหมาย ได้ $x^2 - 1 \leq 8$ หรือ $-3 \leq x \leq 3$

ตัดกับโดเมน $x > 1$ ดังนั้นเซตคำตอบคือ $(1, 3]$

ข้อควรระวัง หาโดเมนจากโจทย์เดิม ไม่ใช่จากรูปที่รวมแล้ว ในตัวอย่างนี้ถ้าหาโดเมนจาก $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 1)$ จะได้ช่วง $[-3, -1)$ เกินมา ซึ่งผิด เพราะ $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$ หาค่าไม่ได้เมื่อ $x < 1$

โจทย์

1. จงแก้สมการ $\log_3(2x-1) < 2$

เฉลย โดเมน: $2x-1 > 0$ ได้ $x > \frac{1}{2}$ ฐาน 3 มากกว่า 1 จึงได้ $2x-1 < 3^2 = 9$ หรือ $x < 5$ รวมกับโดเมน ดังนั้นเซตคำตอบคือ $(\frac{1}{2}, 5)$

2. จงแก้สมการ $\log_{\frac{1}{2}}(x+3) \geq -1$

เฉลย โดเมน: $x > -3$ และ $-1 = \log_{\frac{1}{2}} 2$ ฐาน น้อยกว่า 1 ต้องกลับเครื่องหมาย ได้ $x+3 \leq 2$ หรือ $x \leq -1$ รวมกับโดเมน ดังนั้นเซตคำตอบคือ $(-3, -1]$

3. จงแก้สมการ $\log_{\frac{1}{3}}(3x - 5) > \log_{\frac{1}{3}}(x + 1)$
เฉลย โดเมน: $3x - 5 > 0$ และ $x + 1 > 0$ ได้
 $x > \frac{5}{3}$ ฐานน้อยกว่า 1 จึงกลับเครื่องหมาย ได้
 $3x - 5 < x + 1$ หรือ $x < 3$ ดังนั้นเซตคำตอบ
 คือ $(\frac{5}{3}, 3)$

5. จงแก้สมการ $\log_{0.2}(x^2 - 4x) \geq -1$
เฉลย โดเมน: $x(x - 4) > 0$ ได้ $x < 0$ หรือ
 $x > 4$ และ $-1 = \log_{0.2} 5$ ฐานน้อยกว่า 1 จึง
 ได้ $x^2 - 4x \leq 5$ หรือ $(x - 5)(x + 1) \leq 0$
 คือ $-1 \leq x \leq 5$ ตัดกับโดเมน ดังนั้นเซตคำตอบ
 คือ $[-1, 0) \cup (4, 5]$

7. จงแก้สมการ $\log_4(x + 5) + \log_{\frac{1}{2}}(x - 1) > 0$
เฉลย โดเมน: $x > 1$ เปลี่ยนเป็นฐาน 4 ได้
 $\log_{\frac{1}{2}}(x - 1) = -\log_4(x - 1)^2$ จึงได้
 $\log_4(x + 5) > \log_4(x - 1)^2$ ฐานมากกว่า 1
 ได้ $x + 5 > (x - 1)^2$ หรือ $x^2 - 3x - 4 < 0$
 คือ $-1 < x < 4$ ดังนั้นเซตคำตอบคือ $(1, 4)$

4. จงแก้สมการ $\log_2(x + 5) - \log_2(x - 1) \geq 1$
เฉลย โดเมน: $x > 1$ รวมเป็น $\log_2 \frac{x+5}{x-1} \geq$
 $\log_2 2$ ได้ $\frac{x+5}{x-1} \geq 2$ เนื่องจาก $x - 1 > 0$ คูณ
 ได้ $x + 5 \geq 2x - 2$ หรือ $x \leq 7$ ดังนั้นเซต
 คำตอบคือ $(1, 7]$

6. จงแก้สมการ $(\log_3 x)^2 - \log_3 x^2 < 3$
เฉลย โดเมน: $x > 0$ ให้ $t = \log_3 x$ จะได้
 $\log_3 x^2 = 2t$ สมการเป็น $t^2 - 2t - 3 < 0$
 หรือ $(t - 3)(t + 1) < 0$ ได้ $-1 < t < 3$ คือ
 $3^{-1} < x < 3^3$ ดังนั้นเซตคำตอบคือ $(\frac{1}{3}, 27)$

8. จงแก้สมการ $\log_2 x - 6 \log_x 2 > 1$
เฉลย โดเมน: $x > 0$ และ $x \neq 1$ ให้ $t =$
 $\log_2 x \neq 0$ จะได้ $\log_x 2 = \frac{1}{t}$ สมการเป็น $t -$
 $\frac{6}{t} - 1 > 0$ หรือ $\frac{(t-3)(t+2)}{t} > 0$ (ห้ามคูณด้วย t
 ตรง ๆ เพราะไม่รู้เครื่องหมาย) จากเส้นจำนวนได้
 $-2 < t < 0$ หรือ $t > 3$ คือ $\frac{1}{4} < x < 1$ หรือ
 $x > 8$ ดังนั้นเซตคำตอบคือ $(\frac{1}{4}, 1) \cup (8, \infty)$

โจทย์ผสม

1. จงหาโดเมนของฟังก์ชัน $f(x) = \sqrt{27 - 3^x} + \log_2(x + 2)$
เฉลย ต้องมี $27 - 3^x \geq 0$ คือ $3^x \leq 3^3$ ได้
 $x \leq 3$ และต้องมี $x + 2 > 0$ ได้ $x > -2$
 ดังนั้นโดเมนคือ $(-2, 3]$

2. จงแก้สมการ $\log_{\frac{1}{3}}(\log_2(x - 1)) \geq -1$
เฉลย โดเมน: ต้องมี $\log_2(x - 1) > 0$ คือ $x -$
 $1 > 1$ ได้ $x > 2$ และ $-1 = \log_{\frac{1}{3}} 3$ ฐานน้อย
 กว่า 1 จึงได้ $\log_2(x - 1) \leq 3$ คือ $x - 1 \leq 8$
 หรือ $x \leq 9$ ดังนั้นเซตคำตอบคือ $(2, 9]$

3. จงแก้สมการ $\log_2(4^x - 3 \cdot 2^x + 4) \leq x + 1$

เฉลย ให้ $u = 2^x > 0$ จะได้ $u^2 - 3u + 4 = (u - \frac{3}{2})^2 + \frac{7}{4} > 0$ เสมอ และ $x + 1 = \log_2 2u$ ฐานมากกว่า 1 ได้ $u^2 - 3u + 4 \leq 2u$ หรือ $(u - 1)(u - 4) \leq 0$ คือ $1 \leq 2^x \leq 4$ ดังนั้นเซตคำตอบคือ $[0, 2]$

5. จงแก้สมการ $(2^x - 8) \cdot \log_{\frac{1}{2}}(x + 1) \geq 0$

เฉลย โดเมน: $x > -1$ ตัว $2^x - 8$ เป็นลบเมื่อ $x < 3$ และเป็นบวกเมื่อ $x > 3$ ส่วน $\log_{\frac{1}{2}}(x + 1)$ เป็นบวกเมื่อ $-1 < x < 0$ และเป็นลบเมื่อ $x > 0$ ผลคูณไม่เป็นลบเมื่อสองตัวมีเครื่องหมายเดียวกันหรือตัวใดเป็นศูนย์ ดังนั้นเซตคำตอบคือ $[0, 3]$

7. จงหาค่า m ทั้งหมดที่ทำให้สมการ $9^x - m \cdot 3^x + m + 3 < 0$ ไม่มีคำตอบเป็นจำนวนจริง

เฉลย ให้ $u = 3^x > 0$ และ $g(u) = u^2 - mu + m + 3$ ต้องไม่มี $u > 0$ ที่ $g(u) < 0$ ดิสคริมิแนนต์คือ $(m - 6)(m + 2)$ ถ้า $-2 \leq m \leq 6$ จะได้ $g(u) \geq 0$ ทุก u ใช้ได้ ถ้า $m > 6$ รากทั้งสองเป็นบวก (ผลบวก $m > 0$ ผลคูณ $m + 3 > 0$) ใช้ไม่ได้ ถ้า $m < -2$ ผลบวกรากเป็นลบ จะไม่มีรากบวกเมื่อผลคูณ $m + 3 \geq 0$ ส่วน $m < -3$ มีรากบวกหนึ่งราก ใช้ไม่ได้ ดังนั้น $m \in [-3, 6]$

4. จงแก้สมการ $x^{\log_3 2} + 2^{\log_3 x} \leq 16$

เฉลย โดเมน: $x > 0$ จากสมบัติ $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ ได้ $x^{\log_3 2} = 2^{\log_3 x}$ อสมการจึงเป็น $2 \cdot 2^{\log_3 x} \leq 16$ หรือ $2^{\log_3 x} \leq 2^3$ ได้ $\log_3 x \leq 3$ คือ $x \leq 27$ ดังนั้นเซตคำตอบคือ $(0, 27]$

6. จงแก้สมการ $\log_{x-1}(x + 1) < 2$

เฉลย โดเมน: $x - 1 > 0$, $x - 1 \neq 1$ และ $x + 1 > 0$ ได้ $x > 1$ และ $x \neq 2$ กรณีฐานมากกว่า 1 ($x > 2$) ได้ $x + 1 < (x - 1)^2$ หรือ $x(x - 3) > 0$ จึงได้ $x > 3$ กรณีฐานอยู่ระหว่าง 0 กับ 1 ($1 < x < 2$) กลับเครื่องหมายได้ $x + 1 > (x - 1)^2$ คือ $0 < x < 3$ ซึ่งจริงทั้งช่วง ดังนั้นเซตคำตอบคือ $(1, 2) \cup (3, \infty)$

8. จงแก้สมการ $3^{\log_3(x^2-3)} < 2x$

เฉลย โดเมน: $x^2 - 3 > 0$ คือ $x < -\sqrt{3}$ หรือ $x > \sqrt{3}$ ในโดเมนนี้ $3^{\log_3(x^2-3)} = x^2 - 3$ จึงได้ $x^2 - 2x - 3 < 0$ คือ $-1 < x < 3$ ตัดกับโดเมน ดังนั้นเซตคำตอบคือ $(\sqrt{3}, 3)$

การประยุกต์ของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและลอการิทึม

การเติบโตและการสลายตัว

ปริมาณที่ **เพิ่มขึ้นหรือลดลงเป็นจำนวนเท่าคงที่** ในทุกช่วงเวลาที่ยาวเท่ากัน เช่น จำนวนแบคทีเรีย ประชากร สารกัมมันตรังสี ยาในกระแสเลือด หรือมูลค่าของเครื่องจักร เขียนเป็นฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลของเวลา t ได้

ปริมาณเริ่มต้น A_0 ที่เปลี่ยนเป็น a เท่าทุก ๆ ช่วงเวลา T มีค่า $A(t) = A_0 a^{\frac{t}{T}}$ เป็นการ **เติบโต** เมื่อ $a > 1$ และ **สลายตัว** เมื่อ $0 < a < 1$

ครึ่งชีวิต T คือเวลาที่สารสลายตัวจนเหลือครึ่งหนึ่ง จะได้ $A(t) = A_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ ส่วนปริมาณที่ลดลงร้อยละ p ทุกปี เมื่อผ่านไป n ปีจะเหลือ $A_0 \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n$

แบบต่อเนื่อง $A(t) = A_0 e^{kt}$ ($k > 0$ เติบโต, $k < 0$ สลายตัว) ถ้าต้องการหาเวลา ให้ใส่ $\log$ หรือ $\ln$ ทั้งสองข้างของสมการ

ตัวอย่าง

สารกัมมันตรังสีชนิดหนึ่งมีครึ่งชีวิต 5 วัน นานเท่าใดสารนี้จะเหลือ 10% ของปริมาณเริ่มต้น กำหนด $\log 2 \approx 0.3010$

วิธีทำ ให้ปริมาณเริ่มต้นเป็น A_0 ต้องการ $A_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5}} = \frac{1}{10} A_0$ หรือ $2^{\frac{t}{5}} = 10$ ใส่ $\log$ ทั้งสองข้าง

$$\frac{t}{5} \log 2 = \log 10 = 1$$

$$t = \frac{5}{\log 2} \approx \frac{5}{0.3010} \approx 16.6$$

ดังนั้นใช้เวลาประมาณ 16.6 วัน

ข้อควรระวัง เลขชี้กำลังคือ **จำนวนช่วงเวลา $\frac{t}{T}$** ไม่ใช่ t เช่น ครึ่งชีวิต 8 วัน ผ่านไป 24 วันคือ 3 ช่วง และ “ลดลงร้อยละ 20 ต่อปี” หมายถึงเหลือ 0.8 เท่าของปีก่อน ไม่ใช่ 0.2 เท่า

ตัวอย่าง

ประชากรสัตว์ชนิดหนึ่งเพิ่มเป็น 8 เท่าทุก 6 ปี ในเวลา 4 ปีประชากรจะเพิ่มเป็นกี่เท่า

วิธีทำ ผ่านไป t ปีจะเป็น $8^{\frac{t}{6}} = 2^{\frac{t}{3}}$ เท่า แทน $t = 4$ ได้ $2^2 = 4$ เท่า

ข้อสังเกต ในการ **สลายตัว** แบบเอกซ์โพเนนเชียล เวลาที่ปริมาณสารลดลงจนเหลือครึ่งหนึ่ง (ครึ่งชีวิต) **ไม่ขึ้นกับปริมาณตั้งต้น** เช่น จาก 80 เหลือ 40 กรัม ใช้เวลาเท่ากับจาก 10 เหลือ 5 กรัม และปริมาณจะลดลงเรื่อย ๆ แต่ไม่มีวันเป็นศูนย์

โจทย์

1. แบคทีเรียชนิดหนึ่งเพิ่มจำนวนเป็น 2 เท่าทุก 20 นาที ถ้าเริ่มต้นมี 300 เซลล์ เมื่อเวลาผ่านไป 2 ชั่วโมงจะมีแบคทีเรียกี่เซลล์

เฉลย 2 ชั่วโมงคือ 120 นาที คิดเป็น $\frac{120}{20} = 6$ ช่วง จะได้ $A = 300 \cdot 2^6 = 300 \cdot 64$ ดังนั้นมีแบคทีเรีย 19,200 เซลล์

3. เครื่องจักรราคา 500,000 บาท มีมูลค่าลดลงร้อยละ 20 ต่อปีเมื่อเทียบกับมูลค่าของปีก่อน หลังจากกี่ปีเครื่องจักรนี้จะมีมูลค่าเหลือ 204,800 บาท

เฉลย มูลค่าเหลือ 0.8 เท่าทุกปี จาก $500000(0.8)^n = 204800$ ได้ $(0.8)^n = 0.4096 = (0.8)^4$ จึงได้ $n = 4$ ดังนั้นหลังจาก 4 ปี

5. สารกัมมันตรังสีชนิดหนึ่งเหลือ 80% ของปริมาณเริ่มต้นเมื่อเวลาผ่านไป 3 วัน สารนี้มีครึ่งชีวิตประมาณกี่วัน กำหนด $\log 2 \approx 0.3010$

เฉลย ให้ครึ่งชีวิตเป็น T จาก $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{T}} = 0.8$ ใส่ $\log$ ได้ $-\frac{3}{T} \log 2 = \log 0.8 = 3 \log 2 - 1 \approx -0.097$ ดังนั้น $T \approx \frac{3(0.3010)}{0.097} \approx 9.3$ วัน

2. คาร์บอน-14 มีครึ่งชีวิตประมาณ 5,730 ปี ซากไม้ชิ้นหนึ่งมีคาร์บอน-14 เหลืออยู่ $\frac{1}{8}$ ของปริมาณในต้นไม้ที่ยังมีชีวิต ซากไม้นี้มีอายุประมาณกี่ปี

เฉลย จาก $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}} = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$ จะได้ $\frac{t}{5730} = 3$ หรือ $t = 17190$ ดังนั้นซากไม้มีอายุประมาณ 17,190 ปี

4. วางกาแฟร้อนไว้ในห้อง เมื่อผ่านไป t นาที กาแฟมีอุณหภูมิ $\theta(t) = 25 + 60e^{-0.1t}$ องศาเซลเซียส นานเท่าใดกาแฟจึงเย็นลงเหลือ 37 องศาเซลเซียส กำหนด $\ln 5 \approx 1.6094$

เฉลย จาก $25 + 60e^{-0.1t} = 37$ ได้ $e^{-0.1t} = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$ ใส่ $\ln$ ทั้งสองข้างได้ $-0.1t = -\ln 5$ ดังนั้น $t = 10 \ln 5 \approx 16.1$ นาที

6. เพาะเชื้อแบคทีเรียที่เพิ่มจำนวนแบบเอกซ์โพเนนเชียล นับได้ 5,000 เซลล์เมื่อผ่านไป 3 ชั่วโมง และ 80,000 เซลล์เมื่อผ่านไป 7 ชั่วโมง จงหาจำนวนเซลล์เริ่มต้น และเวลาที่จำนวนเซลล์ถึง 1,000,000 เซลล์ กำหนด $\log 2 \approx 0.3010$

เฉลย ใน 4 ชั่วโมงเพิ่ม $\frac{80000}{5000} = 16 = 2^4$ เท่า จึงเพิ่มเป็น 2 เท่าทุกชั่วโมง เริ่มต้นมี $\frac{5000}{2^3} = 625$ เซลล์ จาก $625 \cdot 2^t = 10^6$ ได้ $2^t = 1600$ ดังนั้น $t = \frac{2+4 \log 2}{\log 2} \approx 10.6$ ชั่วโมง

7. เมือง ก มีประชากร 150,000 คน เพิ่มขึ้นร้อยละ 12 ต่อปี ส่วนเมือง ข มีประชากร 600,000 คน ลดลงร้อยละ 4 ต่อปี อีกประมาณกี่ปีสองเมืองนี้จะมีประชากรเท่ากัน กำหนด $\log 2 \approx 0.3010$, $\log 3 \approx 0.4771$ และ $\log 7 \approx 0.8451$

เฉลย จาก $150000(1.12)^n =$

$$600000(0.96)^n \text{ ได้ } \left(\frac{1.12}{0.96}\right)^n = \left(\frac{7}{6}\right)^n = 4 \text{ จึง}$$

$$\text{ได้ } n = \frac{2 \log 2}{\log 7 - \log 2 - \log 3} \approx \frac{0.6020}{0.0670} \approx 9 \text{ ดังนั้นอีกประมาณ 9 ปี}$$

9. เครื่องกรองกำจัดสารปนเปื้อนได้ 40% ของที่มีอยู่ในแต่ละรอบ ต้องกรองอย่างน้อยกี่รอบ สารปนเปื้อนจึงเหลือไม่เกิน 1% ของเดิม กำหนด $\log 2 \approx 0.3010$ และ $\log 3 \approx 0.4771$

เฉลย แต่ละรอบสารเหลือ 60% ต้องการ

$$(0.6)^n \leq 0.01 \text{ ใส่ } \log \text{ ได้ } n \log 0.6 \leq -2$$

$$\text{โดย } \log 0.6 = \log 2 + \log 3 - 1 \approx$$

$$-0.2219 \text{ เป็นลบ จึงได้ } n \geq \frac{2}{0.2219} \approx 9.01$$

ดังนั้นต้องกรองอย่างน้อย 10 รอบ

8. ผู้ป่วยได้รับยาครั้งละ 60 มิลลิกรัม ทุก 6 ชั่วโมง ยานี้มีครึ่งชีวิตในร่างกาย 3 ชั่วโมง

ก. ทันทีกหลังได้รับยาครั้งที่ n ในร่างกายมียากี่ มิลลิกรัม

ข. ต้องได้รับยาอย่างน้อยกี่ครั้ง ปริมาณยาทันทีหลังได้รับยาจึงจะเกิน 79 มิลลิกรัม

เฉลย ใน 6 ชั่วโมงยาเหลือ $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ เท่า ก.

ทันทีกหลังครั้งที่ n มียา $60\left(1 + \frac{1}{4} + \dots +$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right) = 80\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) \text{ มิลลิกรัม ข. จาก}$$

$$80(1 - 4^{-n}) > 79 \text{ ได้ } 4^n > 80 \text{ โดย } 4^3 =$$

$$64 \text{ และ } 4^4 = 256 \text{ ดังนั้นต้องได้รับยาอย่างน้อย}$$

4 ครั้ง

10. นำขวดน้ำใส่ตู้เย็นที่มีอุณหภูมิคงที่ ผลต่างระหว่างอุณหภูมิน้ำกับตู้เย็นลดลงแบบเอกซ์โพเนนเชียล วัดอุณหภูมิน้ำได้ 30, 18 และ 12 องศาเซลเซียส เมื่อผ่านไป 0, 20 และ 40 นาที จงหาอุณหภูมิในตู้เย็น และเวลาที่น้ำเย็นลงถึง 8 องศาเซลเซียส กำหนด $\log 2 \approx 0.3010$ และ $\log 3 \approx 0.4771$

เฉลย ให้ตู้เย็นมีอุณหภูมิ T ผลต่างที่วัดต่างกันทุก

20 นาทีเป็นลำดับเรขาคณิต จึงได้ $(30 -$

$$T)(12 - T) = (18 - T)^2 \text{ หรือ } 6T = 36 \text{ ได้}$$

$$T = 6 \text{ ผลต่างเป็น 24, 12, 6 คือลดลงครึ่งหนึ่ง}$$

$$\text{ทุก 20 นาที จาก } 24\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}} = 8 - 6 \text{ ได้ } 2^{\frac{t}{20}} =$$

$$12 \text{ จึงได้ } t = \frac{20(2 \log 2 + \log 3)}{\log 2} \approx 71.7 \text{ ดังนั้น}$$

ตู้เย็นมีอุณหภูมิ 6 องศาเซลเซียส และน้ำเย็นลงถึง

8 องศาเซลเซียสเมื่อผ่านไปประมาณ 71.7 นาที

ดอกเบี้ยทบต้น

ดอกเบี้ยทบต้น คือการนำดอกเบี้ยที่ได้ในแต่ละงวดไปรวมกับเงินต้น แล้วคิดดอกเบี้ยงวดถัดไปจากยอดรวมนั้น เงินรวมจึงเพิ่มขึ้นแบบเอกซ์โพเนนเชียล

ฝากเงินต้น P บาท อัตราดอกเบี้ย r ต่อปี ทบต้นปีละ n ครั้ง เป็นเวลา t ปี จะได้เงินรวม $A = P \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$
ทบต้นต่อเนื่อง ได้เงินรวม $A = Pe^{rt}$ และ อัตราดอกเบี้ยที่แท้จริงต่อปี ของการทบต้นปีละ n ครั้ง คือ $\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n - 1$

ตัวอย่าง

ฝากเงิน 10,000 บาท ได้ดอกเบี้ย 8% ต่อปี ทบต้นทุกปี อย่างน้อยก็ปีจึงจะมีเงินรวมถึง 20,000 บาท กำหนด

$$\log 2 \approx 0.3010 \text{ และ } \log 3 \approx 0.4771$$

วิธีทำ ต้องการ $10000(1.08)^t \geq 20000$ หรือ $(1.08)^t \geq 2$ ใส່ $\log$ ทั้งสองข้าง

$$t \log 1.08 \geq \log 2$$

โดย $\log 1.08 = \log 108 - 2 = 2 \log 2 + 3 \log 3 - 2 \approx 0.0333$ จึงได้

$$t \geq \frac{0.3010}{0.0333} \approx 9.04$$

ดังนั้นต้องฝากอย่างน้อย 10 ปี

ข้อควรระวัง เปลี่ยน r เป็นทศนิยมก่อนแทนค่า (8% คือ 0.08) ทบต้นทุก 3 เดือนคือ $n = 4$ และถ้าโจทย์ถามว่า “อย่างน้อยกี่ปี” หรือ “อย่างน้อยกี่งวด” ต้องปัด **จำนวนงวด** ขึ้นเป็นจำนวนเต็มเสมอ เช่น ทบต้นทุกปีแล้วคำนวณได้ 9.04 ก็ต้องตอบ 10 ปี

โจทย์

1. ฝากเงิน 20,000 บาท ได้ดอกเบี้ย 6% ต่อปี ทบต้นทุก 6 เดือน เมื่อครบ 2 ปีจะมีเงินรวมกี่บาท กำหนด $(1.03)^4 \approx 1.1255$

เฉลย ทบต้นทุก 6 เดือนได้ดอกเบี้ยงวดละ 3% รวม 4 งวด จะได้ $A = 20000(1.03)^4 \approx 20000(1.1255)$ ดังนั้นมีเงินรวมประมาณ 22,510 บาท

2. ฝากเงิน 10,000 บาท ในบัญชีที่ทบต้นต่อเนื่อง ด้วยอัตรา 5% ต่อปี เมื่อครบ 20 ปีจะมีเงินรวมประมาณกี่บาท กำหนด $e \approx 2.718$

เฉลย $A = Pe^{rt} = 10000e^{0.05 \cdot 20} = 10000e \approx 10000(2.718)$ ดังนั้นมีเงินรวมประมาณ 27,180 บาท

3. ฝากเงิน 50,000 บาท ทบต้นทุกปี เมื่อครบ 2 ปีมีเงินรวม 62,720 บาท จงหาอัตราดอกเบี้ยต่อปี
- เฉลย** จาก $50000(1+r)^2 = 62720$ ได้ $(1+r)^2 = 1.2544 = (1.12)^2$ เนื่องจาก $1+r > 0$ จึงได้ $r = 0.12$ ดังนั้นอัตราดอกเบี้ยเท่ากับ 12% ต่อปี

5. ธนาคาร ก ให้ดอกเบี้ย 12% ต่อปี ทบต้นทุกเดือน ส่วนธนาคาร ข ให้ดอกเบี้ย 12.6% ต่อปี ทบต้นทุกปี ฝากเงินธนาคารใดได้ผลตอบแทนมากกว่า กำหนด $(1.01)^{12} \approx 1.1268$
- เฉลย** ธนาคาร ก ได้ดอกเบี้ยเดือนละ 1% อัตราที่แท้จริงต่อปีคือ $(1.01)^{12} - 1 \approx 0.1268$ หรือ 12.68% ซึ่งมากกว่า 12.6% ของธนาคาร ข ดังนั้นฝากธนาคาร ก ได้ผลตอบแทนมากกว่า

4. ฝากเงินในบัญชีที่ให้ดอกเบี้ย 10% ต่อปี ทบต้นทุก 6 เดือน ต้องฝากอย่างน้อยกี่งวด (งวดละ 6 เดือน) หรือนานอย่างน้อยเท่าใด เงินรวมจึงจะเกิน 2 เท่าของเงินต้น กำหนด $\log 2 \approx 0.3010$, $\log 3 \approx 0.4771$, $\log 5 \approx 0.6990$ และ $\log 7 \approx 0.8451$
- เฉลย** ได้ดอกเบี้ยงวดละ 5% ให้ฝาก k งวด (งวดละ 6 เดือน) โดย $\log 1.05 = \log \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{100} \approx 0.0212$ จาก $(1.05)^k > 2$ ได้ $k > \frac{0.3010}{0.0212} \approx 14.2$ ดังนั้นต้องฝากอย่างน้อย 15 งวด หรือ 7 ปี 6 เดือน

6. เงินฝากในบัญชีที่ทบต้นต่อเนื่องเพิ่มเป็น 2 เท่าของเงินต้นในเวลา 9 ปี
- ก. เงินรวมจะเป็น 8 เท่าของเงินต้นในเวลากี่ปี
- ข. เงินรวมจะเป็น 6 เท่าของเงินต้นในเวลาประมาณกี่ปี กำหนด $\ln 2 \approx 0.6931$ และ $\ln 3 \approx 1.0986$
- เฉลย** จาก $e^{9r} = 2$ ได้ $e^{rt} = 2^{\frac{t}{9}}$ ก. $2^{\frac{t}{9}} = 8 = 2^3$ ได้ $t = 27$ ปี ข. $2^{\frac{t}{9}} = 6$ ได้ $t = \frac{9 \ln 6}{\ln 2} = 9 \left(1 + \frac{\ln 3}{\ln 2}\right) \approx 9(1 + 1.585) \approx 23.3$ ปี

7. พี่ภูผาวางแผนฝากเงินทุกต้นปี ปีละ 10,000 บาท ในบัญชีที่ให้ดอกเบี้ย 8% ต่อปี ทบต้นทุกปี ต้องฝากอย่างน้อยกี่ปี เงินรวม ณ สิ้นปีจึงจะถึง

405,000 บาท กำหนด $\log 2 \approx 0.3010$ และ $\log 3 \approx 0.4771$

เฉลย สิ้นปีที่ n มีเงินรวม $10000(1.08 + 1.08^2 + \dots + 1.08^n) = 10000 \cdot \frac{1.08(1.08^n - 1)}{0.08} = 135000(1.08^n - 1)$ ต้องการ $135000(1.08^n - 1) \geq 405000$ ได้ $(1.08)^n \geq 4$ โดย $\log 1.08 = 2 \log 2 + 3 \log 3 - 2 \approx 0.0333$ จึงได้ $n \geq \frac{2 \log 2}{\log 1.08} \approx \frac{0.6020}{0.0333} \approx 18.1$ ดังนั้นต้องฝากอย่างน้อย 19 ปี

9. ฝากเงินก้อนหนึ่งในบัญชีทบต้นทุกปี ได้ดอกเบี้ยในปีแรก 2,000 บาท และในปีที่สอง 2,160 บาท จงหาอัตราดอกเบี้ยต่อปีและเงินต้น

เฉลย ให้เงินต้น P อัตรา r ดอกเบี้ยปีแรก $Pr = 2000$ ปีที่สอง $P(1+r)r = 2160$ หารกันได้ $1+r = 1.08$ จึงได้ $r = 0.08$ และ $P = \frac{2000}{0.08} = 25000$ ดังนั้นอัตรา 8% ต่อปี เงินต้น 25,000 บาท

8. ฝากเงิน 100,000 บาท ทบต้นต่อเนื่อง ครบ t ปีมีเงินรวม 150,000 บาท ถ้าอัตราดอกเบี้ยเป็น 2 เท่า ครบ t ปีเท่าเดิมจะมีเงินรวมกี่บาท

เฉลย จาก $100000e^{rt} = 150000$ ได้ $e^{rt} = 1.5$ เมื่ออัตราเป็น $2r$ จะมีเงิน $100000e^{2rt} = 100000(e^{rt})^2 = 100000(2.25)$ ดังนั้นมีเงินรวม 225,000 บาท

10. เลือกรับเงินได้ 3 แบบ แบบที่ 1 รับ 100,000 บาททันที แบบที่ 2 รับ 60,000 บาททันทีและอีก 50,000 บาทเมื่อครบ 2 ปี แบบที่ 3 รับ 120,000 บาทเมื่อครบ 2 ปี ถ้านำเงินที่รับไปฝากทบต้นทุกปีด้วยอัตรา r ต่อปี จงหาช่วงของ r ที่ทำให้แบบที่ 2 มีเงินรวมเมื่อครบ 2 ปีมากที่สุด

เฉลย ให้ $x = (1+r)^2$ เมื่อครบ 2 ปี แบบที่ 1, 2, 3 มีเงิน $100000x$, $60000x + 50000$ และ 120000 บาท แบบที่ 2 มากกว่าแบบที่ 1 เมื่อ $x < \frac{5}{4}$ และมากกว่าแบบที่ 3 เมื่อ $x > \frac{7}{6}$ จึงได้ $\frac{7}{6} < (1+r)^2 < \frac{5}{4}$ ดังนั้น $\sqrt{\frac{7}{6}} - 1 < r < \frac{\sqrt{5}}{2} - 1$ หรือประมาณ 8.0% ถึง 11.8% ต่อปี

มาตราลอการิทึม

ปริมาณที่มีช่วงค่ากว้างมาก เช่น ความเป็นกรด ความดังของเสียง และขนาดแผ่นดินไหว นิยมวัดด้วย **มาตราลอการิทึม** ซึ่งค่าบนมาตราเปลี่ยนไป 1 หน่วย หมายถึงปริมาณจริงเปลี่ยนไปเป็นจำนวนเท่าคงที่

ความเป็นกรด-เบส $pH = -\log[H^+]$ เมื่อ $[H^+]$ คือความเข้มข้นของไฮโดรเจนไอออน (โมลต่อลิตร) สารที่มี pH น้อยกว่า 7 เป็นกรด

ความดังของเสียง $\beta = 10 \log \frac{I}{I_0}$ เดซิเบล (dB) เมื่อ I คือความเข้มเสียง และ $I_0 = 10^{-12}$ วัตต์ต่อตารางเมตร

ขนาดแผ่นดินไหว $M = \log \frac{A}{A_0}$ เมื่อ A คือแอมพลิจูด และพลังงาน E (จูล) สัมพันธ์กับขนาดตาม $\log E = 4.8 + 1.5M$

ค่าบนมาตรา	ปริมาณจริง
pH ลดลง 1	$[H^+]$ เพิ่มขึ้น 10 เท่า
ความดังเพิ่มขึ้น 10 dB	I เพิ่มขึ้น 10 เท่า
ขนาด M เพิ่มขึ้น 1	A เพิ่มขึ้น 10 เท่า และ E เพิ่มขึ้น $10^{1.5} \approx 31.6$ เท่า

ตัวอย่าง

เสียงรบกวนจากเครื่องจักรในโรงงานมีค่า 95 dB ส่วนเสียงในห้องสมุดมีค่า 35 dB ความเข้มเสียงของรถไฟฟ้าเป็นกี่เท่าของความเข้มเสียงในห้องสมุด

วิธีทำ ให้ความเข้มเสียงของรถไฟฟ้าและห้องสมุดเป็น I_1 และ I_2 นำระดับเสียงมาลบกัน

$$95 - 35 = 10 \log \frac{I_1}{I_0} - 10 \log \frac{I_2}{I_0} = 10 \log \frac{I_1}{I_2}$$

จึงได้ $\log \frac{I_1}{I_2} = 6$ หรือ $\frac{I_1}{I_2} = 10^6$

ดังนั้นความเข้มเสียงของรถไฟฟ้าเป็น 1,000,000 เท่าของเสียงในห้องสมุด

ข้อควรระวัง ค่าบนมาตราลอการิทึม **บวกกันตรง ๆ ไม่ได้** เช่น ลำโพง 2 ตัวที่ดังตัวละ 80 dB เปิดพร้อมกันไม่ได้ดัง 160 dB แต่ความเข้มรวมเป็น 2 เท่า จึงดัง $80 + 10 \log 2 \approx 83$ dB

เทคนิค ถ้าโจทย์ให้ค่าบนมาตราแล้วถามปริมาณจริง ให้เขียนกลับเป็นเลขยกกำลังของ 10 เช่น $[H^+] = 10^{-pH}$ และ $I = I_0 \cdot 10^{\frac{\beta}{10}}$ ส่วน 0 dB คือ $I = I_0$ ซึ่งเป็นเสียงเบาที่สุดที่หูได้ยิน ไม่ใช่ความเงียบ

โจทย์

1. น้ำส้มชนิดหนึ่งมีความเข้มข้นของไฮโดรเจนไอออน 2×10^{-4} โมลต่อลิตร จงหา pH ของน้ำส้มนี้
กำหนด $\log 2 \approx 0.3010$
เฉลย $pH = -\log(2 \times 10^{-4}) = -(\log 2 - 4) \approx 4 - 0.3010$ ดังนั้น $pH \approx 3.70$
2. ขณะแสดงคอนเสิร์ต ความเข้มเสียงบริเวณหน้าเวทีเท่ากับ 10^{-1} วัตต์ต่อตารางเมตร เสียงนี้ดังกี่เดซิเบล
เฉลย $\beta = 10 \log \frac{10^{-1}}{10^{-12}} = 10 \log 10^{11} = 10(11)$ ดังนั้นเสียงดัง 110 เดซิเบล
3. น้ำทะเลตัวอย่างหนึ่งมี pH เท่ากับ 8.3 จงหาความเข้มข้นของไฮโดรเจนไอออนในน้ำทะเลนี้ กำหนด $\log 5 \approx 0.6990$
เฉลย $[H^+] = 10^{-8.3} = 10^{0.7} \times 10^{-9}$ และ $10^{0.7} \approx 10^{0.6990} \approx 5$ ดังนั้น $[H^+] \approx 5 \times 10^{-9}$ โมลต่อลิตร
4. พลังงาน E ของแผ่นดินไหวขนาด M เป็นไปตาม $\log E = 4.8 + 1.5M$ และ $M = \log \frac{A}{A_0}$ เมื่อ A คือแอมพลิจูด แผ่นดินไหวครั้งแรกปล่อยพลังงานเป็น 1,000 เท่าของครั้งที่สองซึ่งมีขนาด 4.6 จงหาขนาดของครั้งแรก และแอมพลิจูดของครั้งแรกเป็นกี่เท่าของครั้งที่สอง
เฉลย $\log E_1 - \log E_2 = 1.5(M_1 - M_2)$ ได้ $3 = 1.5(M_1 - 4.6)$ จึงได้ $M_1 = 6.6$ และ $\log \frac{A_1}{A_2} = M_1 - M_2 = 2$ ดังนั้นขนาด 6.6 และแอมพลิจูดเป็น 100 เท่า
5. หูฟังตัดเสียงรบกวนลดความเข้มเสียงจากภายนอกลงเหลือ $\frac{1}{50}$ ของเดิม ระดับเสียงที่ได้ยินลดลงประมาณกี่เดซิเบล กำหนด $\log 2 \approx 0.3010$
เฉลย ระดับเสียงลดลง $\beta_1 - \beta_2 = 10 \log \frac{I_1}{I_2} = 10 \log 50 = 10(2 - \log 2) \approx 10(1.699)$ ดังนั้นลดลงประมาณ 17 เดซิเบล
6. ผสมสารละลายกรดที่มี pH 2 ปริมาตร 100 มิลลิลิตร กับสารละลายกรดที่มี pH 3 ปริมาตร 800 มิลลิลิตร ถ้าจำนวนโมลของ H^+ รวมกันได้ตรง ๆ จงหา pH ของสารผสม กำหนด $\log 2 \approx 0.3010$
เฉลย H^+ มีทั้งหมด $0.1(10^{-2}) + 0.8(10^{-3}) = 1.8 \times 10^{-3}$ โมล ในปริมาตร 0.9 ลิตร จึงได้ $[H^+] = 2 \times 10^{-3}$ โมลต่อลิตร ดังนั้น $pH = 3 - \log 2 \approx 2.70$

7. ในโรงงานแห่งหนึ่ง เมื่อเปิดเครื่องจักรแบบเดียวกัน 10 เครื่องพร้อมกัน วัดระดับเสียงได้ 90 dB โดยความเข้มเสียงรวมเท่ากับผลบวกของความเข้มเสียงของแต่ละเครื่อง กำหนด $\log 2 \approx 0.3010$
- ก. ถ้าปิดเครื่องจักรไป 5 เครื่อง ระดับเสียงจะเป็นเท่าใด
- ข. ต้องปิดเครื่องจักรอย่างน้อยกี่เครื่อง ระดับเสียงจึงจะต่ำกว่า 85 dB

เฉลย เครื่องเดียวมีความเข้ม $\frac{1}{10}$ ของทั้งหมด จึงดัง $90 - 10 = 80$ dB ก. เปิด 5 เครื่องดัง $80 + 10 \log 5 = 90 - 10 \log 2 \approx 87$ dB ข. เปิด k เครื่องดัง $80 + 10 \log k < 85$ ได้ $k < 10^{0.5} = \sqrt{10} \approx 3.16$ จึงเปิดได้ไม่เกิน 3 เครื่อง ดังนั้นต้องปิดอย่างน้อย 7 เครื่อง

โจทย์ผสม

- สารกัมมันตรังสีชนิดหนึ่งมีครึ่งชีวิต 10 ปี ถ้าเขียนปริมาณที่เหลือในรูป $A(t) = A_0 e^{-kt}$ จงหาค่า k และหาว่าเมื่อผ่านไป 30 ปี สารจะเหลือกี่เปอร์เซ็นต์ของปริมาณเริ่มต้น กำหนด $\ln 2 \approx 0.6931$
- น้ำในบ่อบำบัดมี pH เท่ากับ 4.0 หลังเติมสารปรับสภาพ ความเข้มข้นของ H^+ ลดลงครึ่งหนึ่งทุก 2 วัน อีกประมาณกี่วันน้ำในบ่อจะมี pH เท่ากับ 5.2 กำหนด $\log 2 \approx 0.3010$

เฉลย จาก $e^{-10k} = \frac{1}{2}$ ได้ $k = \frac{\ln 2}{10} \approx 0.0693$ ต่อปี เมื่อ $t = 30$ ได้ $e^{-30k} = (e^{-10k})^3 = \frac{1}{8}$ ดังนั้นสารเหลือ 12.5%

เฉลย $[H^+] = 10^{-4} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}}$ จึงได้ $pH = 4 + \frac{t}{2} \log 2$ ต้องการ $\frac{t}{2} \log 2 = 1.2$ ได้ $t = \frac{2.4}{0.3010} \approx 7.97$ ดังนั้นอีกประมาณ 8 วัน

3. ธนาคารให้ดอกเบี้ย 8% ต่อปี ทบต้นทุกปี ถ้าต้องการบัญชีทบต้นต่อเนื่องที่ให้เงินรวมเท่ากันเมื่อครบแต่ละปี ต้องใช้อัตราดอกเบี้ยต่อปีประมาณเท่าใด กำหนด $\ln 3 \approx 1.0986$ และ $\ln 5 \approx 1.6094$

เฉลย ต้องการ $e^r = 1.08 = \frac{27}{25}$ จึงได้ $r =$

$$\ln 27 - \ln 25 = 3 \ln 3 - 2 \ln 5 \approx 3.2958 - 3.2188 = 0.0770 \text{ ดังนั้นอัตราดอกเบี้ยประมาณ } 7.70\% \text{ ต่อปี}$$

5. พลังงาน E ของแผ่นดินไหวขนาด M หาได้จาก $\log E = 4.8 + 1.5M$ แผ่นดินไหวหลักขนาด 7.0 มีอาฟเตอร์ช็อกขนาด 6.0 ตามมา 10 ครั้ง
ก. พลังงานรวมของอาฟเตอร์ช็อกเป็นกี่เท่าของแผ่นดินไหวหลัก
ข. ถ้าพลังงานรวมนี้เกิดจากแผ่นดินไหวครั้งเดียว จะมีขนาดเท่าใด

เฉลย ขนาดต่างกัน 1 พลังงานต่างกัน $10^{1.5}$ เท่า

$$\text{ก. } \frac{10E_6}{E_7} = \frac{10}{10^{1.5}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \approx 0.32 \text{ เท่า ข.}$$

$$\log(10E_6) = 1 + 4.8 + 1.5(6) = 14.8 \text{ จาก } 4.8 + 1.5M = 14.8 \text{ ได้ } M = \frac{20}{3} \approx 6.67$$

4. ราคาสินค้าเพิ่มขึ้น 5% ต่อปี ส่วนเงินฝากได้ดอกเบี้ย 8% ต่อปี ทบต้นทุกปี อย่างน้อยกี่ปีเงินฝากจึงจะซื้อสินค้าได้เป็น 2 เท่าของที่ซื้อได้ในวันนี้ ฝาก กำหนด $\log 2 \approx 0.3010$, $\log 3 \approx 0.4771$, $\log 5 \approx 0.6990$ และ $\log 7 \approx 0.8451$

เฉลย หลัง n ปี ซื้อได้เป็น $\left(\frac{1.08}{1.05}\right)^n = \left(\frac{36}{35}\right)^n$

$$\text{เท่า โดย } \log \frac{36}{35} = 2 \log 2 + 2 \log 3 -$$

$$\log 5 - \log 7 \approx 0.0121 \text{ จาก } \left(\frac{36}{35}\right)^n \geq 2 \text{ ได้}$$

$$n \geq \frac{0.3010}{0.0121} \approx 24.9 \text{ ดังนั้นอย่างน้อย 25 ปี}$$

6. แบคทีเรียในร่างกายผู้ป่วยเพิ่มเป็น 2 เท่าทุก 20 นาที และเมื่อครบทุก 1 ชั่วโมง ผู้ป่วยจะได้รับยาซึ่งฆ่าแบคทีเรียที่มีอยู่ขณะนั้นทันที 90% เริ่มต้นมีแบคทีเรีย 10^6 เซลล์ กำหนด $\log 2 \approx 0.3010$
ก. ต้องได้รับยาอย่างน้อยกี่ครั้ง จึงเหลือแบคทีเรียน้อยกว่า 10^5 เซลล์
ข. ยาต้องฆ่าได้มากกว่ากี่เปอร์เซ็นต์ จำนวนแบคทีเรียจึงลดลงทุกชั่วโมง

เฉลย ใน 1 ชั่วโมงแบคทีเรียเพิ่ม $2^3 = 8$ เท่า ก.

$$\text{ยาฆ่า } 90\% \text{ จึงเหลือ } 8(0.1) = 0.8 \text{ เท่าต่อชั่วโมง}$$

$$\text{ต้องการ } 10^6(0.8)^n < 10^5 \text{ หรือ } (0.8)^n <$$

$$0.1 \text{ โดย } \log 0.8 = 3 \log 2 - 1 \approx -0.097 \text{ ได้}$$

$$n > \frac{1}{0.097} \approx 10.3 \text{ ดังนั้นอย่างน้อย 11 ครั้ง ข.}$$

$$\text{ถ้าฆ่าได้ } p \text{ ต้องมี } 8(1-p) < 1 \text{ ได้ } p > \frac{7}{8} \text{ คือ}$$

$$\text{มากกว่า } 87.5\%$$

7. กู้เงิน 1,000,000 บาท ดอกเบี้ย 8% ต่อปี ทบต้นทุกปี แล้วผ่อนชำระทุกสิ้นปี ปีละ 100,000 บาท โดยงวดสุดท้ายจ่ายเท่าที่เหลือ ต้องผ่อนกี่ปีจึงจะหมดหนี้ กำหนด $\log 2 \approx 0.3010$ และ $\log 3 \approx 0.4771$

เฉลย หลังจ่ายงวดที่ n เหลือหนี้ $10^6(1.08)^n - 100000 \cdot \frac{(1.08)^n - 1}{0.08} = 1250000 - 250000(1.08)^n$ หนี้หมดเมื่อ $(1.08)^n \geq 5$ โดย $\log 1.08 = 2 \log 2 + 3 \log 3 - 2 \approx 0.0333$ ได้ $n \geq \frac{1 - \log 2}{\log 1.08} \approx \frac{0.6990}{0.0333} \approx 20.99$ ดังนั้นต้องผ่อน 21 ปี

9. สารละลายชนิดหนึ่งมี $[H^+][OH^-] = 10^{-14}$ และมี $[OH^-]$ มากเป็น 500 เท่าของ $[H^+]$ จงหา pH ของสารละลายนี้ กำหนด $\log 5 \approx 0.6990$

เฉลย แทน $[OH^-] = 500[H^+]$ ได้ $500[H^+]^2 = 10^{-14}$ ใส่ $\log$ ได้ $\log 500 + 2 \log[H^+] = -14$ จึงได้ $pH = -\log[H^+] = \frac{14 + \log 500}{2} \approx \frac{14 + 2.699}{2}$ ดังนั้น $pH \approx 8.35$

8. ขณะปิดลำโพงในห้อง เสียงดัง 90 dB หลังจากนั้น ความเข้มเสียงลดลงแบบ $I = Ae^{-kt}$ เมื่อ A คือ ความเข้มขณะปิดลำโพง และ t เป็นวินาที ผ่านไป 1.2 วินาทีเสียงเหลือ 30 dB จงหาค่า k และเวลาที่เสียงเหลือ 40 dB กำหนด $\ln 2 \approx 0.6931$ และ $\ln 5 \approx 1.6094$

เฉลย ใน 1.2 วินาทีเสียงลดลง 60 dB คือ $10 \log \frac{A}{I} = 60$ จึงได้ $e^{-1.2k} = 10^{-6}$ หรือ $k = 5 \ln 10 = 5(\ln 2 + \ln 5) \approx 11.5$ เสียงเหลือ 40 dB เมื่อลดลง 50 dB คือ $e^{-kt} = 10^{-5}$ ได้ $t = \frac{5 \ln 10}{k} = 1$ ดังนั้น $k \approx 11.5$ และใช้เวลา 1 วินาที

10. หลังรับประทานยา t ชั่วโมง ความเข้มข้นของยาในเลือดเป็น $C(t) = 80(2^{-\frac{t}{2}} - 2^{-t})$ มิลลิกรัมต่อลิตร กำหนด $\log 2 \approx 0.3010$ และ $\log 3 \approx 0.4771$

ก. ความเข้มข้นสูงสุดเท่าใด เกิดขึ้นเมื่อใด
ข. ยาออกฤทธิ์เมื่อ $C(t) \geq 15$ ยาออกฤทธิ์นานประมาณกี่ชั่วโมง

เฉลย ให้ $u = 2^{-\frac{t}{2}}$ จะได้ $C = 80(u - u^2) = 20 - 80(u - \frac{1}{2})^2$ ก. สูงสุด 20 มิลลิกรัมต่อลิตร เมื่อ $u = \frac{1}{2}$ คือ $t = 2$ ชั่วโมง ข. $C \geq 15$ เมื่อ $16u^2 - 16u + 3 \leq 0$ หรือ $\frac{1}{4} \leq u \leq \frac{3}{4}$ คือ $2 \log_2 \frac{4}{3} \leq t \leq 4$ ดังนั้นออกฤทธิ์นาน $2 \log_2 3 = \frac{2 \log 3}{\log 2} \approx 3.17$ ชั่วโมง