ทบทวนเรื่องที่ต้องใช้

สัญลักษณ์ของเซต

สัญลักษณ์	ความหมาย
$\mathbb{N}$	เซตของจำนวนนับ
$\mathbb{Z}$	เซตของจำนวนเต็ม
$\mathbb{Q}$	เซตของจำนวนตรรกยะ
$\mathbb{Q}'$	เซตของจำนวนอตรรกยะ
$\mathbb{R}$	เซตของจำนวนจริง
$a \in A$	a เป็นสมาชิกในเซต A

การอ่านเซตแบบบอกเงื่อนไข

เช่น $r = \{(x,y) \in A \times B \mid \text{เงื่อนไข} : x = y\}$

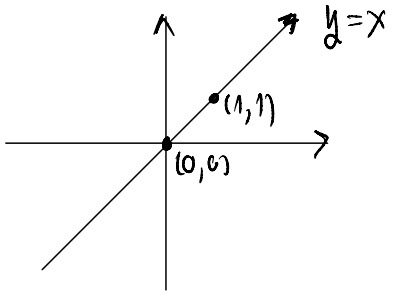
จะบอกว่า สนใจขอบเขต $x \in A$ และ $y \in B$ โดยมีเงื่อนไขว่าจะเป็นสมาชิกของ r เมื่อ $x = y$

กราฟที่ควรรู้จัก

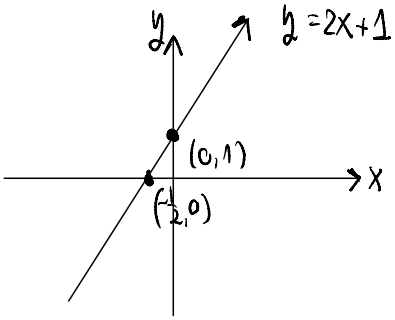
จงวาดกราฟคร่าวๆ โดยควรมีจุดหลักๆ(ถ้ามี) คือ จุดตัดแกน x และ y จุดสูงสุดต่ำสุดสัมพัทธ์ และแนวโน้มที่ถูกต้อง โดยไม่ต้องตามสเกลจริงก็ได้

กราฟเส้นตรง

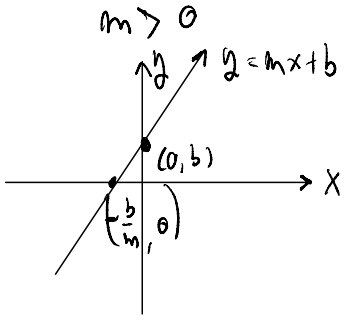
1. $y = x$

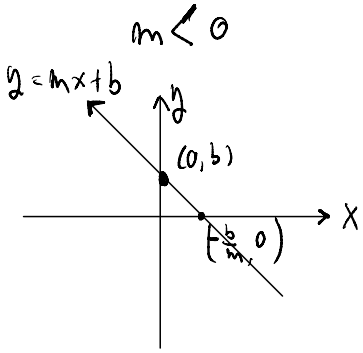


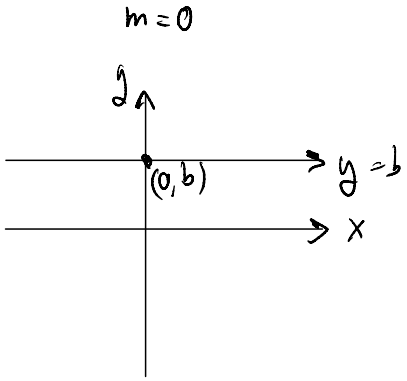
2. $y = 2x + 1$



3. $y = mx + b$ เมื่อ $m, b \in \mathbb{R}$

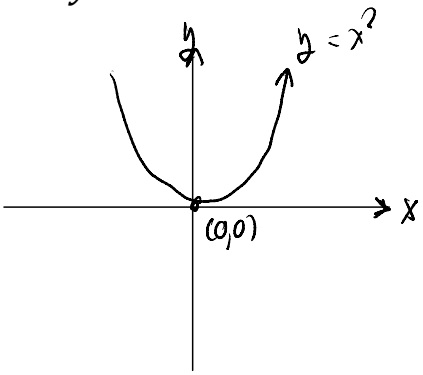




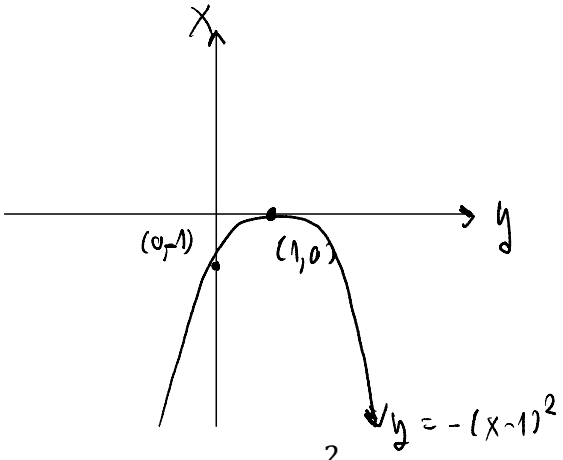


กราฟพาราโบลา

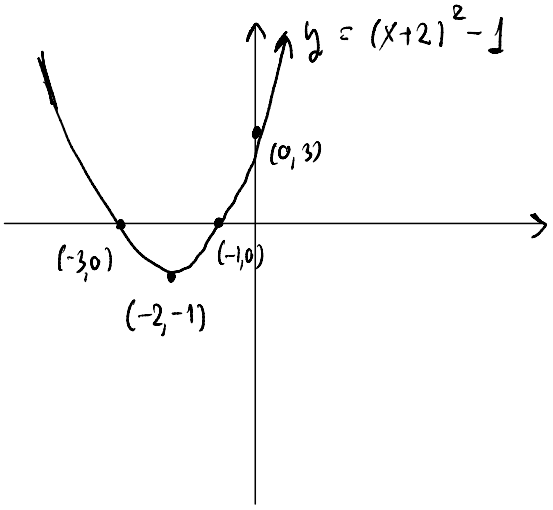
4. $y = x^2$



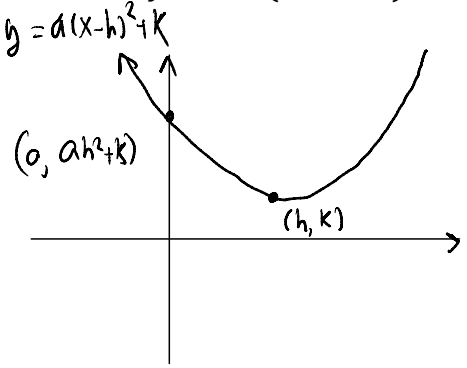
5. $y = -(x-1)^2$



6. $y = (x+2)^2 - 1$



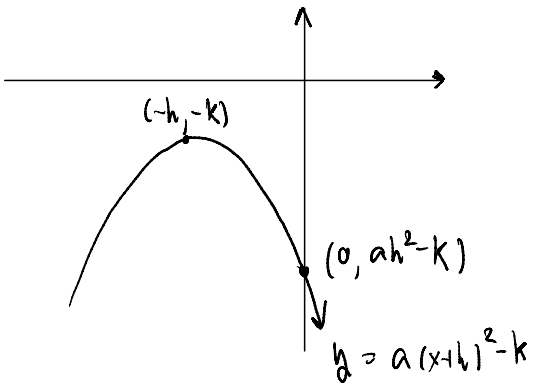
7. $y = a(x - h)^2 + k$ เมื่อ $a, h, k \in \mathbb{R}$ และ $a > 0$



h, k แล้วแต่จะกำหนด
เป็นเปลี่ยงแค่ จุด local min
เน้นเข้าใจ trend ไม่ต้องหาโจทย์

$\pm\sqrt{\frac{k}{a}} - h$

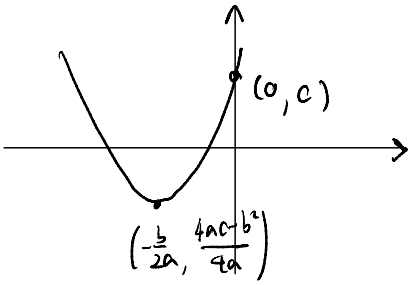
8. $y = a(x + h)^2 - k$ เมื่อ $a, h, k \in \mathbb{R}$ และ $a < 0$



9. $y = ax^2 + bx + c$ เมื่อ $a, b, c \in \mathbb{R}$ และ $a > 0$

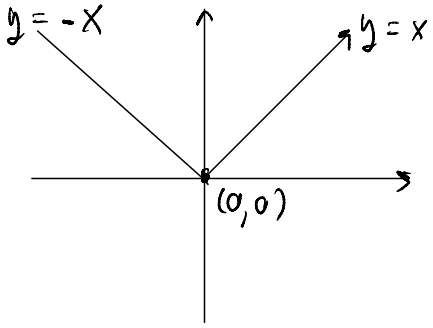
$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$

$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$



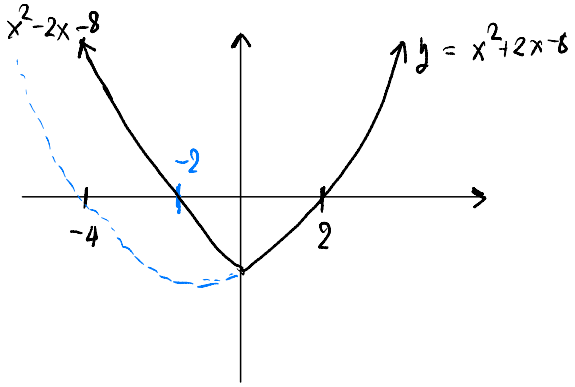
กราฟค่าสัมบูรณ์

10. $y = |x|$

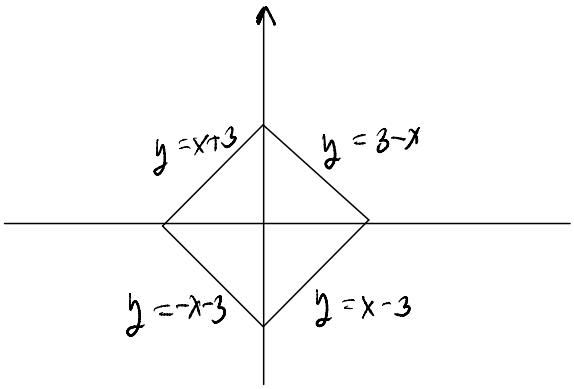


11. $y = x^2 + 2|x| - 8$

$y = |x|^2 + 2|x| - 8 = (|x| - 2)(|x| + 4)$



12. $|y| + |x| = 3$



ความสัมพันธ์

คู่อันดับ

คือ การนำสิ่ง สองสิ่ง มาเขียนคู่กัน โดยมีลำดับ ซึ่งคู่อันดับ a, b เขียนแทนด้วย (a, b) โดยเรียก a ว่า สมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับ และเรียก b ว่า สมาชิกตัวหลังของคู่อันดับ

การเท่ากันของคู่อันดับ หมายถึง $[\, x_1, y_1) = (x_2, y_2)\,] \leftrightarrow [\, x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2]$

เช่น จงหาค่าของ a, bเมื่อ $(a + 1, 2b) = (- 5, 12)$

จะได้ว่า $a + 1 = - 5$ หาค่า $a = - 6$

และ $2b = 12$ หาค่า $b = 6$

1. จงหาค่าของ a, bเมื่อ $(a + b, a - b) = (5, - 3)$

$a+b=5$ ——— ①

$a-b=-3$ ——— ②

①+②: $2a=2$ $a=1$ แทน①

$1+b=5$ → $b=4$

2. จงหาค่าของ a, bเมื่อ $(a + b, b^2 + a + 1) = (2a - b, 4)$

$a+b=2a-b$ ——— ①

$b^2+a+1=4$ ——— ②

จาก① ; $a=2b$ แทน②

②: $b^2+2b+1=4$

$(b+1)^2=4$

$b+1=2,-2$ $b=1,-3$

$b=1$; $a=2$, $b=-3$; $a=-6$

$\therefore (a,b)=(2,1),(-6,-3)$

ผลคูณคาร์ทีเซียน

เป็นการกระทำกันระหว่างเซต 2 เซต โดยผลคูณคาร์ทีเซียนระหว่างเซต A และ B เขียนแทนด้วย $A\times B$ ซึ่ง

$$A\times B = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

โดยจากนิยามนี้เห็นได้ชัดว่า $n(A\times B) = n(A) * n(B)$

ข้อควรระวัง $A\times B \neq B\times A$

จงเขียน $A\times B$ ในรูปเซตของคู่อันดับ

1. $A = \{1,2,3\}$ และ $B = \{1,2\}$

$A\times B = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2)\}$

2. $B = \{1,2,3\}$ และ $A = \{1,2\}$

$A\times B = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3)\}$

3. $A = \{\}$ และ $B = \{1, 2, 3, 4\}$

$A \times B = \{\}$

4. $A = \{1, 2\}$ และ $B = B_1 \cup B_2$ โดย $B_1 = \{1, 2\},\ B_2 = \{3, 4\}$

$B = B_1 \cup B_2 = \{1, 2, 3, 4\}$

$A \times B = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4)\}$

5. $A = \{1, 2\}$ และ $B = A \times A$

$B = A \times A = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$

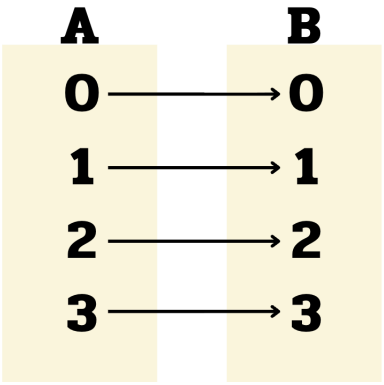
$A \times B = \{(1,(1,1)), (1,(1,2)), (1,(2,1)), (1,(2,2))$

$(2,(1,1)), (2,(1,2)), (2,(2,1)), (2,(2,2))\}$

ความสัมพันธ์

ความสัมพันธ์คือ ความเกี่ยวข้องกันระหว่างกลุ่มสองกลุ่ม

เช่นสมมติความสัมพันธ์ $f: A \to B$ โดย $A, B \in \{0, 1, 2, 3\}$ เมื่อ $a \in A, b \in B \to a = b$ สามารถวาดความสัมพันธ์ได้ดังแผนภาพ



และเรายังสามารถใช้เซตของคู่อันดับในการเขียนความสัมพันธ์แบบแจกแจงสมาชิกได้ โดยให้

$$r = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$$

และสามารถเขียนในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไขได้เป็น

$$r = \{(x, y) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid x = y \ \wedge \ x < 4\}$$

ให้ $A = \{1, 2, 3, ..., 10\}$ และ $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ จงเขียนความสัมพันธ์ต่อไปนี้แบบแจกแจงสมาชิก

1. $r = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x\}$

$r = \{(1,2), (2,4), (3,6), (4,8), (5,10)\}$

2. $r = \{(x, y) \in A \times B \mid y > 5x\}$

$r = \{(1,6), (1,8), (1,10)\}$

3. $r = \{(x, y) \in A \times B \mid y < x - 9\}$

$r = \{\}$

4. $r = \{(x, y) \in B \times A \mid y = |x - 5|\}$

$r = \{(2,3), (4,1), (6,1), (8,3), (10,5)\}$

5. $r = \{(x, y) \in A \times A \mid y = \frac{5x}{3}\}$

$r = \{(3,5), (6,10)\}$

$2, 4, 6, 8, 10$

6. $r = \{(x, y) \in B \times B \mid x - y = -2\}$

$r = \{(2,4), (4,6), (6,8), (8,10)\}$

7. $r = \{(x, y, z) \in A \times A \times B \mid z > 2x + 3y + 1\}$

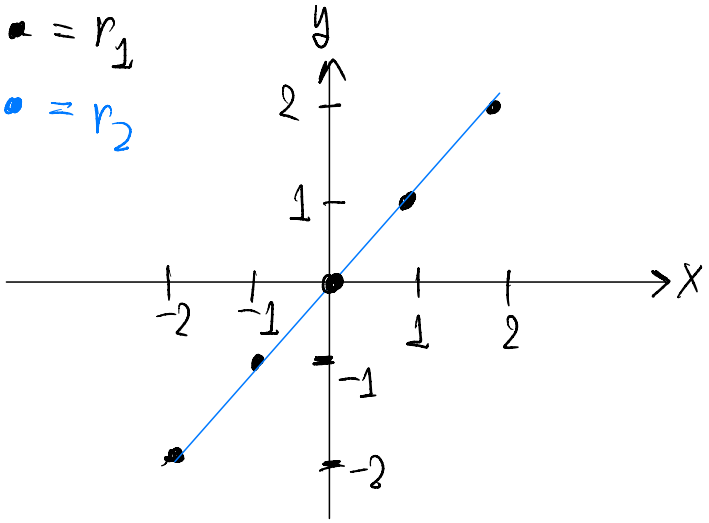
$r = \{(1,1,8), (1,1,10), (2,1,10), (1,2,10)\}$

กราฟของความสัมพันธ์

กราฟของความสัมพันธ์

ปกติแล้วถ้า $r = \{(x, y) \in A \times A \mid x = y\}$ โดย A เป็นเซตจำกัดจะได้ว่ากราฟความสัมพันธ์คาร์ทีเซียนเป็นกราฟจุดและไม่ต่อเนื่อง พอกำหนดใหม่ $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = y\}$ จะมีจุดต่างๆที่ทำให้กราฟต่อเนื่องและเป็นเส้น

จงวาดกราฟแสดงความสัมพันธ์ $r_1 = \{(x, y) \in A \times A \mid x = y\}$ และ $r_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = y\}$ โดย $A \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$



เนื่องจากในมอปลายส่วนใหญ่ ถ้าไม่ได้เรียนในเรื่องจำนวนเชิงซ้อนจะเข้าใจตรงกันว่าเป็นจำนวนจริง จึงค่อนข้างละ $\{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid \ldots\ldots \}$ ไว้ในฐานที่เข้าใจ เช่นถ้าบอกว่า $y = x^2$ จะรู้ว่าหมายถึง $\{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid y = x^2 \}$

โดยความสัมพันธ์ใน $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ส่วนใหญ่กราฟจะต่อเนื่องและเป็นเส้น วิธีวาดกราฟจึงสามารถพล็อตจุดหลักๆ(ถ้ามี) คือ จุดตัดแกน x และ y จุดสูงสุดต่ำสุดสัมพัทธ์ และแนวโน้มที่ถูกต้อง โดยสามารถลองแทนค่าเพื่อหาแนวโน้มได้

จงพิจารณาความสัมพันธ์ต่อไปนี้ว่ามี $(x,y) = (-1,1)$ เป็นสมาชิกหรือไม่

1. $y = |x|$

เทน $x = -1$, $y = 1$ เพื่อตรวจสอบ

$1 = |-1|$ เป็นจริง

ดังนั้น $y = |x|$ ผ่าน $(-1,1)$

2. $y = \sqrt{x} - 2$

เทน $X = -1$, $y = 1$ เพื่อตรวจสอบ

$1 = \sqrt{-1} - 2$ สมการ $x, y \in \mathbb{R}$ $\sqrt{x}$, $x < 0$ ไม่อยู่ในโดเมน

ดังนั้น $y = \sqrt{x} - 2$ ไม่ผ่าน $(-1, 1)$

3. $y = 3^x - 4$

เทน $X = -1$, $y = 1$ เพื่อตรวจสอบ

$1 = 3^{-1} - 4 = \frac{1}{3} - 4$ ไม่เป็นจริง

ดังนั้น $y = 3^x - 4$ ไม่ผ่าน $(-1, 1)$

4. $x^2 + 2y^2 = 3$

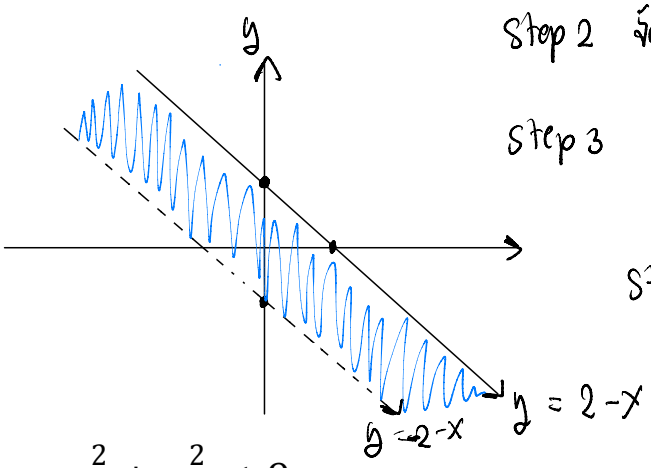
เทน $X = -1$, $y = 1$ เพื่อตรวจสอบ

LHS : $(-1)^2 + 2(1)^2 = 3 = RHS$

ดังนั้น $x^2 + 2y^2 = 3$ ผ่าน $(-1, 1)$

จงเขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ต่อไปนี้

1. $-2 < x + y \leq 2$



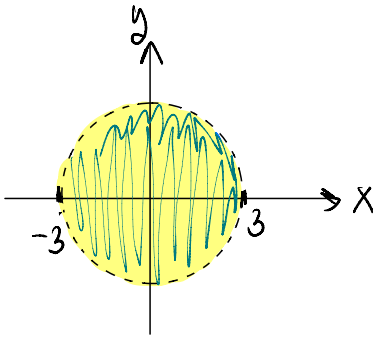
Step 1 แยกอสมการ $-2 < x+y$, $x+y \leq 2$

Step 2 จัดรูป y ได้ $y > -2-x$ และ $y \leq 2-x$

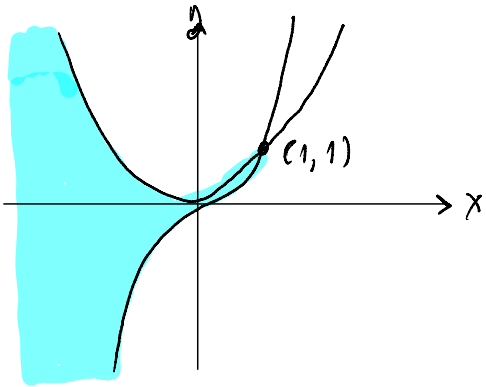
Step 3 สามารถใช้ = แทนอสมการ
ใช้เส้นทึบกับ $\leq$, $\geq$ เส้นประแทน $<$, $>$

Step 4 หา Area ที่ล้อมคลุม
สามารถพิจารณาจากการแทนค่าได้

2. $x^2 + y^2 < 9$



3. $x^3 < y \leq x^2$



โดเมนและเรนจ์

โดเมนและเรนจ์

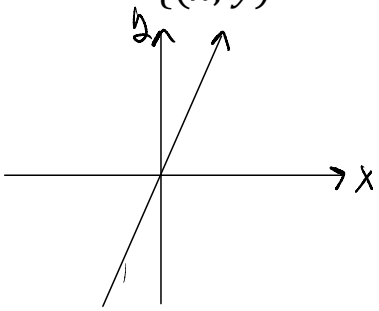
ให้มีความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid \ldots\ldots \}$ จะได้ว่าโดเมนเขียนแทนด้วย D_r เป็นเซตของค่า $x \in \mathbb{R}$ ที่ได้ใช้ และเรนจ์เขียนแทนด้วย R_r เป็นเซตของค่า $y \in \mathbb{R}$ ที่ได้ใช้

<u>ตัวอย่าง</u> ให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid y = 3x + 1 \}$ จากการลองแทนค่าและพิจารณาแบบแจกแจงสมาชิก ได้ว่า $x \in \{1, 2, 3,...\}$ และ $y = \{4, 7, 10,...\}$ จะได้ว่า $D_r = \mathbb{N}$ และ $R_r = \{t \in \mathbb{N} \mid t = 3x + 1,\ x \in \mathbb{N}\}$

จงหาโดเมนและเรนจ์

ฟังก์ชันเส้นตรง

1. $r = \{(x, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid y = 2x \}$

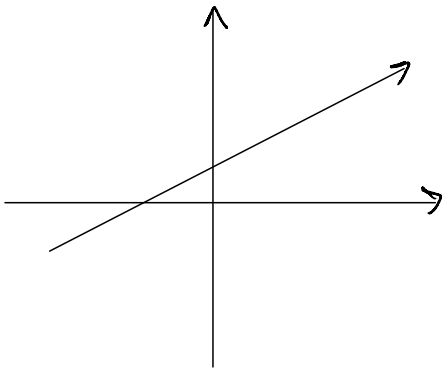


เห็นได้ว่า $D_r = \mathbb{R}$

$R_r = \mathbb{R}$

2. $r = \{(x, y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R} \mid x = 3y - 4\}$

$y = \frac{x+4}{3}$



กราฟเส้นตรง

$D_r = \mathbb{R}$

$R_r = \mathbb{R}$

3. $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2\}$

พิจารณาค่า x แทนได้ ทั้ง $\mathbb{R}$

$\therefore \quad D_r = \mathbb{R}$

จาก $x^2 \geq 0 \quad \therefore \quad R_r = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

4. $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = y^2 - 1\}$

พิจารณาค่า y แทนได้ ทั้ง $\mathbb{R}$ [ไม่ขึ้นกับอะไร]

$\therefore \quad R_r = \mathbb{R}$

จาก $y^2 \geq 0$

$y^2 - 1 \geq -1$

$\therefore \quad D_r = [-1, +\infty)$

5. $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 2x = (y - 2)(y - 4)\}$

เห็นได้ชัดว่า $R_r = \mathbb{R}$ เพราะ ไม่ขึ้นกับค่าอะไร

จัดรูป ให้เป็น กำลัง 2 สมบูรณ์

$2x = [(y-3) - 1][(y-3) - 1]$

$= (y-3)^2 - 1 \geq 0 - 1$

$x \geq -\frac{1}{2}$

$\therefore \quad D_r = [-\frac{1}{2}, +\infty)$

ฟังก์ชันแบบอื่น ๆ

6. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x^2 + 4y^2 < 9\}$

พิจารณา x ที่เป็นไปได้ $x^2 = 9 - 4y^2$

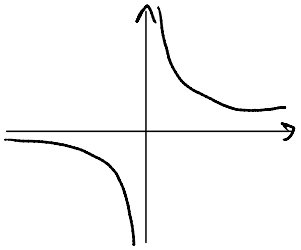
จาก $x^2 = 9 - 4y^2 < 9 - 0 = 9$

$\therefore |x| < 3 \rightarrow -3 < x < 3$

$D_r = [-3, 3]$

ในทำนองเดียวกัน $R_r = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

7. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid xy = 1\}$



พิจารณา x เป็นได้หมด $\mathbb{R} - \{0\}$

$\therefore D_r = \mathbb{R} - \{0\}$

ในทำนองเดียวกัน $R_r = \mathbb{R} - \{0\}$

8. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x^2 - y^2 = 1\}$

$x^2 = 1 + y^2$

พิจารณาค่า x $1 + y^2 \geq 1 + 0 = 1$

$\therefore x^2 \geq 1$

$D_r = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

ค่า y เท่าอะไรก็ได้ จะมีค่า x เสมอ

$\therefore R_r = \mathbb{R}$

9. $r = \{(x, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid y = \frac{2x+1}{x-4}\}$

$y = \frac{2x+1}{x-4} = 2 + \frac{9}{x-4}$

เห็นได้ว่า $x \neq 4$, $x \in \mathbb{R}$ และ $\frac{9}{x-4} \neq 0$

$\therefore y = 2 + \frac{9}{x-4} \neq 2$

$\therefore D_r = \mathbb{R} - \{4\}$ $R_r = \mathbb{R} - \{2\}$

10. $r = \{(x, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x = \frac{3y}{\sqrt{y+2}}\}$

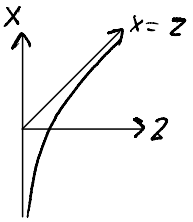
จาก $\frac{1}{\sqrt{y+2}}$; $y+2 \geq 0$, $y+2 \neq 0$ $\rightarrow$ $y > -2$ $R_r = (-2, +\infty)$

สังเกตุ $x = \frac{3y}{\sqrt{y+2}} = 3\sqrt{y+2} - \frac{6}{\sqrt{y+2}}$

ของ $3\sqrt{y+2} = z \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

$x = z - \frac{18}{z}$

$\therefore x \in \mathbb{R} \rightarrow D_r = \mathbb{R}$



11. $r = \{(x, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid xy - 3x + 2y + 8 = 0\}$

สังเกตุ $(x+2)(y-3) + 14 = 0$

$y = \frac{-14}{x+2} + 3$

เห็นได้ว่า $x \in \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow D_r = \mathbb{R} - \{2\}$

และ $-\frac{14}{x+2} \neq 0 \rightarrow y = 3 - \frac{14}{x+2} \neq 3 - 0 = 3$

$\therefore R_r = \mathbb{R} - \{3\}$

12. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid y = \sqrt{4 - x^2} + 1\}$

พิจารณา $\sqrt{4-x^2}$ | พิจารณา y

$4 - x^2 \geq 0$ | $0 \leq \sqrt{4-x^2} \leq 2$

$x^2 \leq 4$ | $1 \leq y \leq 3$

$-2 \leq x \leq 2$ | $R_r = [1,3]$

$D_r = [-2,2]$

13. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid y = \sqrt{x^2 - 7x + 6}\}$

พิจารณา $x^2 - 7x + 6 > 0$ | จาก $0 \leq \sqrt{x^2-7x+6}$

$(x-1)(x-6) > 0$ | $\therefore R_r = [0, +\infty)$

$D_r = (-\infty, 1) \cup (6, +\infty)$

14. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid y = \sqrt{\frac{(x+3)(2-x)}{(x-1)}}\}$

พิจารณา $\frac{(x+3)(2-x)}{(x-1)} > 0 \quad , x \neq 1$

$D_f = (-\infty, -3] \cup (1, 2]$

จาก $\sqrt{\frac{(x+3)(2-x)}{(x-1)}} \geq 0$

$\therefore R_f = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

ฟังก์ชัน

ฟังก์ชัน

ฟังก์ชันคือความสัมพันธ์ที่ x แต่ละตัวจับคู่ y ได้มากสุด 1 ตัว หรือนิยามว่า เมื่อ for all $x \in \mathbb{R}$

$$[f(x_1) \neq f(x_2)] \rightarrow [x_1 \neq x_2]$$

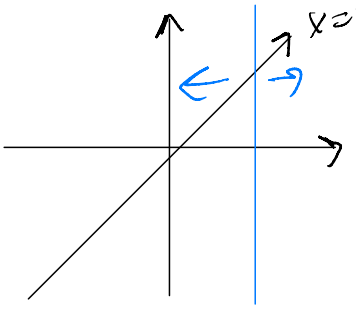
ตัวอย่าง พิจารณาว่า $x = y^2$ เป็นฟังก์ชันหรือไม่

พิจารณา $y = \pm\sqrt{x}$ เห็นได้ว่ามี $y_1 \neq -y_1$ แต่ให้ $x = y_1^{\,2}$ เหมือนกัน ดังนั้นไม่เป็นฟังก์ชัน

หรือจะพิจารณาจากการวาดกราฟ แล้วพิจารณาเส้น $x = k$ ใดๆ เมื่อ $k \in \mathbb{R}$ แล้วมีคำตอบมากกว่า 2 จุด ก็จะไม่เป็นฟังก์ชัน

จงพิจารณาต่อไปนี้ว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่

1. $x = y$



จากกราฟ 1 ค่า x ให้ 1 ค่า y

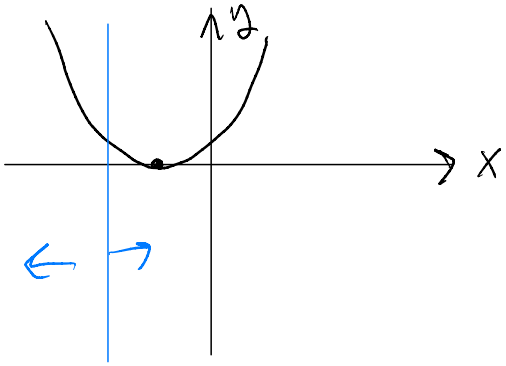
∴ เป็นฟังก์ชัน

2. $y = 2x + 1$

กราฟเส้นตรง 1 ค่า x ให้ 1 ค่า y

∴ เป็นฟังก์ชัน

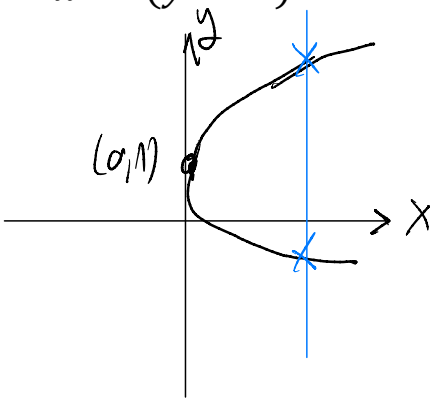
3. $y = (x + 1)^2$



จากกราฟ 1 ค่า x ให้ 1 ค่า y

∴ เป็นฟังก์ชัน

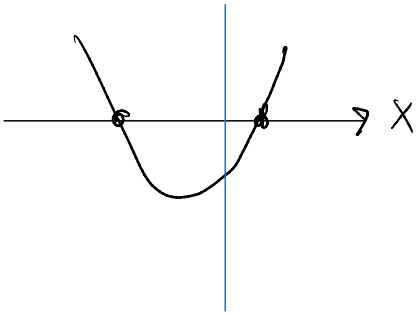
4. $x = (y - 1)^2$



จากกราฟ 1 ค่า x ให้ ค่า y 2 ค่า

∴ ไม่เป็นฟังก์ชัน

5. $y = x^2 + x - 6$

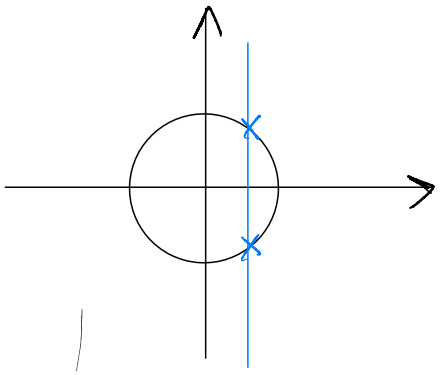


จากกราฟ 1 ค่า x ให้ 1 ค่า y

∴ เป็นฟังก์ชัน

หรือ $y = \pm\sqrt{1-x^2}$

6. $x^2 + y^2 = 1$



จากกราฟ 1 ค่า x ให้ ค่า y 2 ค่า

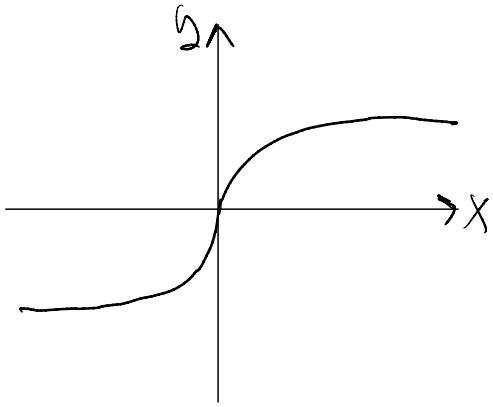
∴ ไม่เป็นฟังก์ชัน

7. $x = |y + 1|$

พิจารณา $y = -2$ และ $y = 0$ ได้ $x = 1$ เหมือนกัน

∴ ไม่เป็นฟังก์ชัน

8. $x = y^3$



จากกราฟ 1 ค่า x ให้ 1 ค่า y

∴ เป็นฟังก์ชัน

9. $|x| + |y| = 1$

พิจารณา $y = 1, -1$ ให้ค่า $x = 0$ เหมือนกัน

$\therefore$ ไม่เป็นฟังก์ชัน

10. $(x - y)(x + y) = 4$

$x^2 - y^2 = 4$

พิจารณา $y = 1, -1$ ให้ค่า $x = \sqrt{5}$ เหมือนกัน

$\therefore$ ไม่เป็นฟังก์ชัน

11. $x < y^3$

พิจารณา ใส่ y ใดๆ มา y จำนวนมากใส่ค่า x เหมือนกัน

$\therefore$ ไม่เป็นฟังก์ชัน

ฟังก์ชัน 1-1 ทั่วถึง

ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง $(f: 1-1)$

นิยาม ไม่มีสมาชิกตัวหน้าซ้ำกันที่ให้ผลลัพธ์เป็นสมาชิกตัวหลังตัวเดียวกัน หรือ for all $x \in \mathbb{R}$

$$[f(x_1) = f(x_2)] \rightarrow [x_1 = x_2]$$

ตัวอย่างพิจารณาว่าฟังก์ชัน $y = x^2 + 1$ เป็น $f: 1-1$ หรือไม่

Step1: พิจารณาว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่

พิจารณาจากกราฟ $y = x^2 + 1$ ค่า x ใดๆให้ค่า y ได้เพียง 1 ค่า ดังนั้นเป็นฟังก์ชัน

Step2: พิจารณาว่าเป็นฟังก์ชัน $1-1$ หรือไม่

พิจาณา $f(x_1) = f(x_2)$: $x_1^2 + 1 = x_2^2 + 1$

$x_1^2 = x_2^2$ เห็นได้ว่ามี $x_1 = -x_2$ ดังนั้น ไม่เป็นฟังก์ชัน $1-1$

พิจารณาความสัมพันธ์ต่อไปนี้ว่าเป็นฟังก์ชัน $1-1$ หรือไม่

1. $x = 2y + 1$

$y = \frac{x-1}{2}$

กราฟเส้นตรงเป็นฟังก์ชัน

สมมติ $f(x_1) = f(x_2)$

$$\frac{x_1 - 1}{2} = \frac{x_2 - 1}{2}$$

$x_1 = x_2$ ∴ เป็นฟังก์ชัน 1-1

2. $y = (x-1)^2 + 1$

กราฟพาราโบลา เป็นฟังก์ชัน

สมมติ มี $f(x_1) = f(x_2)$

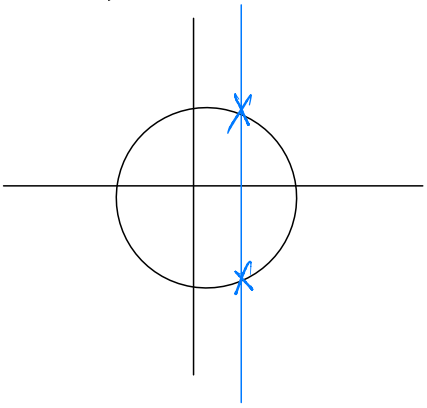
$$(x_1-1)^2 + 1 = (x_2-1)^2 + 1$$

$$|x_1-1| = |x_2-1|$$

∴ ไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1

3. $x^2 + y^2 = 4$

พิจารณาว่าเป็นฟังก์ชัน



จากกราฟ 1 ค่า x ให้ ค่า y 2 ค่า

∴ ไม่เป็นฟังก์ชัน

4. $y = e^x - 1$

กราฟ exponential เป็นฟังก์ชัน

สมมติ ว่า $f(x_1) = f(x_2)$

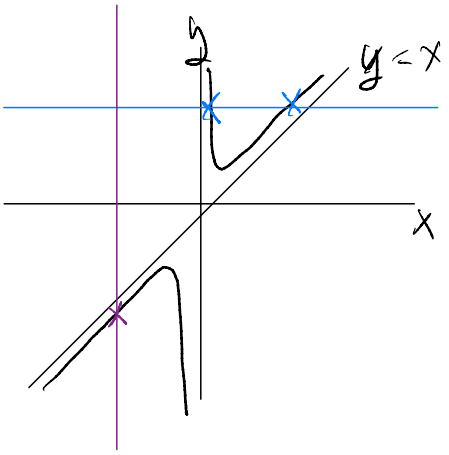
$$e^{x_1} - 1 = e^{x_2} - 1$$

$$x_1 = x_2$$

∴ เป็นฟังก์ชัน 1-1

5. $y = x + \frac{1}{x}$

จากกราฟ $f(x)$ เป็น ฟังก์ชัน



จากกราฟ

$f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 \neq x_2$

∴ ไม่ เป็นฟังก์ชัน 1-1

ฟังก์ชันทั่วถึง (onto function)

ให้ $f: X \to Y$ สำหรับทุก $y \in Y$ จะมี $x \in X$ ที่ทำให้ $f(x) = y$ เสมอ หรือคือทุก $y \in Y$ มี x ที่ทำให้เกิดได้

ตัวอย่างพิจารณาว่า $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y = x^2 + 1$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึงหรือไม่

Step1: พิจารณาว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่

พิจารณาจากกราฟ $y = x^2 + 1$ ค่า x ใดๆให้ค่า y ได้เพียง 1 ค่า ดังนั้นเป็นฟังก์ชัน

Step2: พิจารณาว่าเป็นฟังก์ชันทั่วถึงหรือไม่

พิจาณา $x^2 \geq 0 \to x^2 + 1 \geq 1$ ดังนั้น $y = x^2 + 1$ ไม่เป็นฟังก์ชันทั่วถึง เนื่องจากหาค่า $y = -1$ จะไม่มีค่า x ที่ทำให้เกิดค่า y

พิจารณาความสัมพันธ์ต่อไปนี้ว่าเป็นฟังก์ชันทั่วถึงหรือไม่

1. $x = 2y + 1$

Step 1 กราฟเส้นตรง เป็นฟังก์ชัน

Step 2 พิจารณา $R_f = \mathbb{R}$

สากกราฟเส้นตรง $R_f = \mathbb{R}$

∴ เป็นฟังก์ชัน ทั่วถึง

2. $y = (x-1)^2 + 1$

Step 1 กราฟพาราโบลาเปิดขึ้น

Step 2 พิจารณา $R_f = \mathbb{R}$

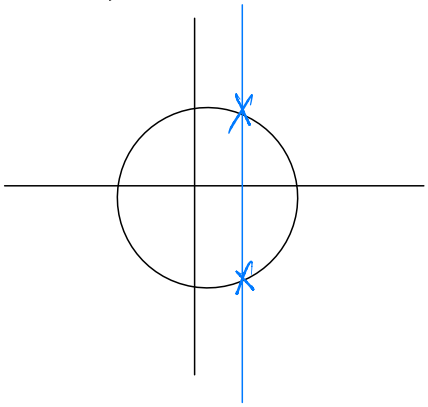
จาก $(x-1)^2 + 1 \geq 0 + 1 = 1$

$R_f \neq \mathbb{R}$

∴ ไม่เป็นฟังก์ชัน ห่วยปิง

3. $x^2 + y^2 = 4$

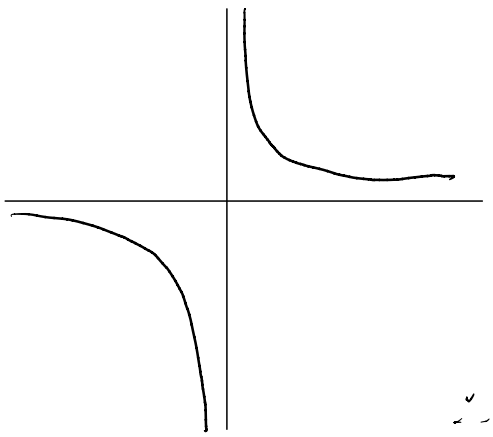
พิจารณาว่าเป็นฟังก์ชัน



จากกราฟ 1 ค่า x ให้ ค่า y 2 ค่า

∴ ไม่เป็นฟังก์ชัน

4. $y = \frac{1}{x}$



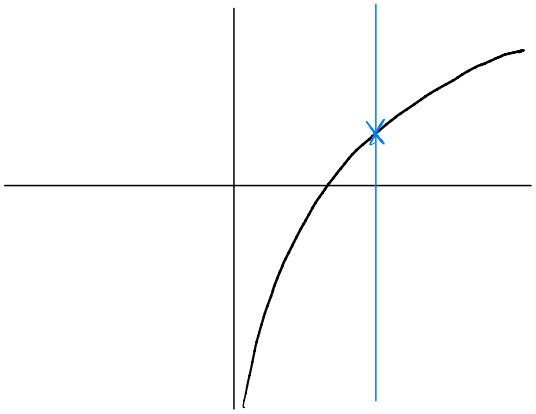
จากกราฟ

$y = \frac{1}{x}$ เป็นฟังก์ชัน

พิสัย $R_f = \mathbb{R} - \{0\}$

$\therefore y = \frac{1}{x}$ ไม่ทั่วถึงบน $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

5. $y = log(x)$



จากกราฟ $log(x)$ เป็นฟังก์ชัน

พิสัย $R_f = \mathbb{R}$

$\therefore y = log(x)$ ทั่วถึงบน $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

ฟังก์ชันประกอบ

ฟังก์ชันประกอบ

ให้ $f: A \to B$ และ $g: B \to C$ จะได้ว่า $g \circ f: A \to C$

จะเห็นว่า B เป็นทั้ง R_f และ D_g ดังนั้นจะมี $g \circ f$ ได้เมื่อ $R_f \cap D_g \neq \emptyset$ และ

$D_{g \circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\}$

ตัวอย่าง ให้ $f(x) = 2x - 3$ และ $g(x) = x^2 + 5$ หา $(g \circ f)(1)$

จาก $g \circ f = g(f(x)) = g(2x - 3) = (2x - 3)^2 + 5$

$(g \circ f)(1) = (2 * 1 - 3)^2 + 5 = 6$

จงหา $(g \circ f)(x)$ และ $(f \circ g)(x)$ และ $(f \circ g)(1)$ ต่อไปนี้

1. $f(x) = x + 1$ และ $g(x) = 1$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+1) = 1$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(1) = 1+1 = 2$

$(f \circ g)(1) = 2$

2. $f(x) = x + 1$ และ $g(x) = x$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+1) = x+1$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x) = x+1$

$(f \circ g)(1) = 1+1 = 2$

3. $f(x) = x - 1$ และ $g(x) = x + 2$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x-1) = (x-1)+2 = x+1$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+2) = (x+2)-1 = x+1$

$(f \circ g)(1) = 1+1 = 2$

4. $f(x) = 2x + 3$ และ $g(x) = x - 5$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x+3) = (2x+3)-5 = 2x-2$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x-5) = 2(x-5)+3 = 2x-7$

$(f \circ g)(1) = 2(1)-7 = -5$

5. $f(x) = x^2 + 1$ และ $g(x) = 2x - 1$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2+1) = 2(x^2+1)-1 = 2x^2+1$

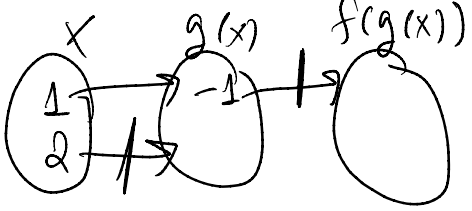
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x-1) = (2x-1)^2+1 = 4x^2-4x+2$

$(f \circ g)(1) = 4(1)^2-4(1)+2 = 2$

6. $f(x) = \frac{1}{x+1}$ และ $g(x) = \frac{1}{x-2}$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x+1}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x+1} - 2} = -\frac{x+1}{2x+1}$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x-2}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x-2} + 1} = \frac{x-2}{x-1}$



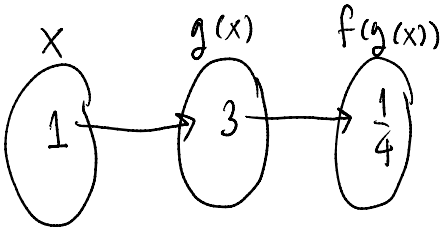
$(f \circ g)(1)$ หาค่าไม่ได้

7. $f(x) = \frac{1}{x+1}$ และ $g(x) = x^2 + 2x$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x+1}\right) = \left(\frac{1}{x+1}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{x+1}\right) = \frac{2x+3}{(x+1)^2}$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2+2x) = \frac{1}{x^2+2x+1} = \frac{1}{(x+1)^2}$

$(f \circ g)(1) = \frac{1}{4}$



อินเวอร์สฟังก์ชัน

อินเวอร์สฟังก์ชัน

ให้มีความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \in A \times B \mid condition\}$ จะมี

$r^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \mid same\ condition\}$ คืออินเวอร์สความสัมพันธ์ของ r เป็นความสัมพันธ์ที่โยงกลับทางจาก r

และ เมื่อ r เป็นฟังก์ชัน $1 - 1$ จะได้ว่า ความสัมพันธ์ r^{-1} จะเป็นฟังก์ชัน

การวาดกราฟ สามารถวาดได้จากการสะท้อนข้าม $y = x$ หรือหาสมการอินเวอร์สก็ได้

ตัวอย่าง จงหาอินเวอร์สความสัมพันธ์ $y = x^2$ และพิจารณาว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่

หาอินเวอร์สฟังก์ชัน: สลับ x, y ในความสัมพันธ์ ได้ว่า $x = y^2$

จากนั้นจัด y ในรูปของ x ได้ว่า $f^{-1}(x) = \pm\sqrt{x}$

จาก $y = x^2$ ไม่เป็นฟังก์ชัน $1 - 1$ ดังนั้น $f^{-1}(x)$ ไม่เป็นฟังก์ชัน

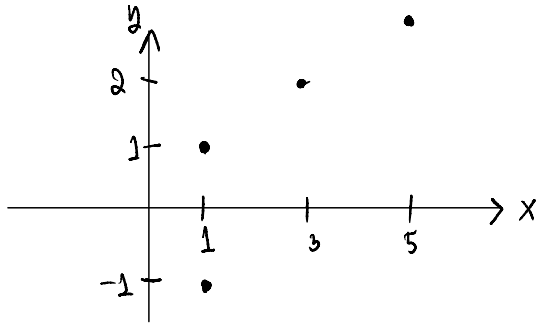
จงหาอินเวอร์สความสัมพันธ์และวาดกราฟและพิจารณาว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่

1. $f = \{(1, 1), (2, 3), (4, 5), (-1, 1)\}$

$f^{-1} = \{(1,1), (3,2), (5,4), (1,-1)\}$

จาก $f^{-1}(1)$ ได้ค่า 2 ค่า

$\therefore f^{-1}$ ไม่เป็นฟังก์ชัน

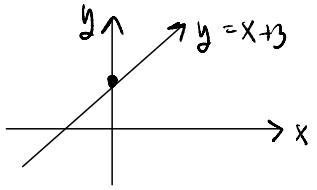


2. $f(x) = x - 3$

สลับ x, y : $x = f^{-1}(x) - 3$

$f^{-1}(x) = x + 3$

จาก $f(x)$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 $\therefore$ $f^{-1}(x)$ เป็นฟังก์ชัน

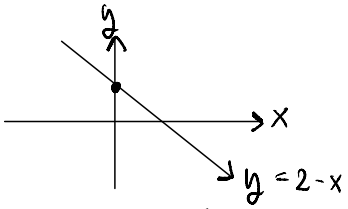


3. $f(x) = 2 - x$

สลับ x, y : $x = 2 - f^{-1}(x)$

$f^{-1}(x) = 2 - x$

จาก $f(x)$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 $\therefore$ $f^{-1}(x)$ เป็นฟังก์ชัน

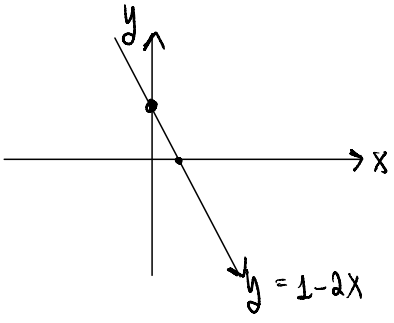


4. $f(x) = \frac{1-x}{2}$

$x = \frac{1 - f^{-1}(x)}{2}$

$f^{-1}(x) = 1 - 2x$

จาก $f(x)$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 $\therefore$ $f^{-1}(x)$ เป็นฟังก์ชัน

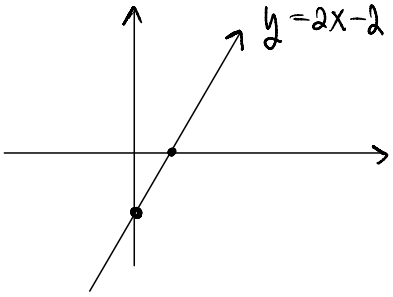


5. $f(x) = \frac{x}{2} + 1$

$$X = \frac{f^{-1}(x)}{2} + 1$$

$$2X - 2 = f^{-1}(x)$$

จาก $f(x)$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 $\therefore$ $f^{-1}(x)$ เป็นฟังก์ชัน

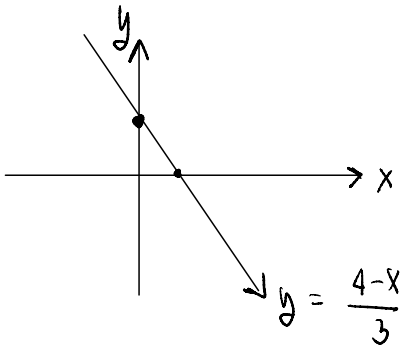


6. $f(x) = 4 - 3x$

$$x = 4 - 3f^{-1}(x)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{4-x}{3}$$

จาก $f(x)$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 $\therefore$ $f^{-1}(x)$ เป็นฟังก์ชัน

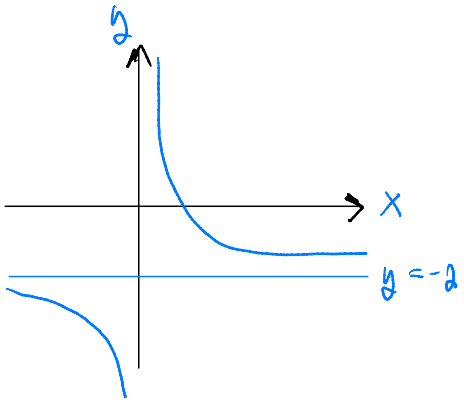


7. $f(x) = \frac{1}{x+2}$

$$x = \frac{1}{f^{-1}(x)+2}$$

$$f^{-1}(x)+2 = \frac{1}{x}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{x} - 2$$



จาก $f(x)$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 $\therefore$ $f^{-1}(x)$ เป็นฟังก์ชัน

8. $f(x) = \frac{1-x}{x+3}$

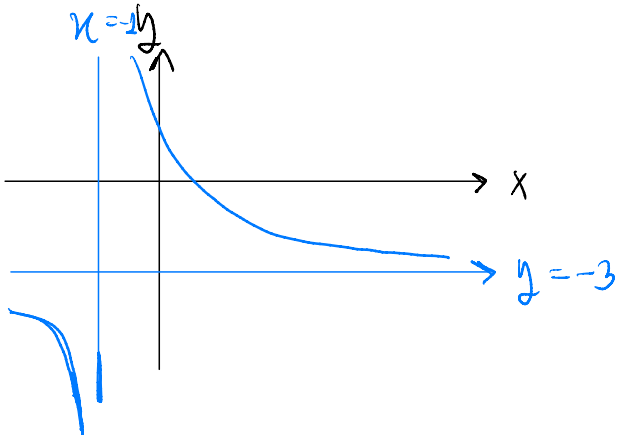
จัดรูปให้เหลือ x น้อยสุด $f(x) = -1 + \frac{4}{x+3}$

$$x = -1 + \frac{4}{f^{-1}(x)+3}$$

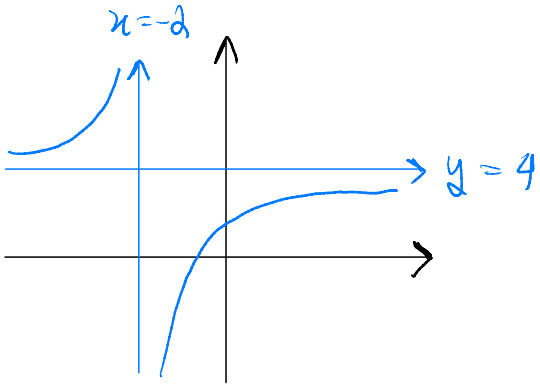
$$f^{-1}(x)+3 = \frac{4}{x+1}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{4}{x+1} - 3$$

จาก $f(x)$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 $\therefore$ $f^{-1}(x)$ เป็นฟังก์ชัน



9. $f(x+3) = \frac{2x+5}{1-x}$



จัดรูป ตัวแปร x : $f(x+3) = -2 + \frac{7}{1-x}$

ดู composite function $f(x+3) = -2 + \frac{7}{-(x+3)+4}$

$f(x) = -2 + \frac{7}{4-x}$

หา $f^{-1}(x)$: $x = -2 + \frac{7}{4-f^{-1}(x)}$

$4 - f^{-1}(x) = \frac{7}{x+2}$

$f^{-1}(x) = 4 - \frac{7}{x+2}$

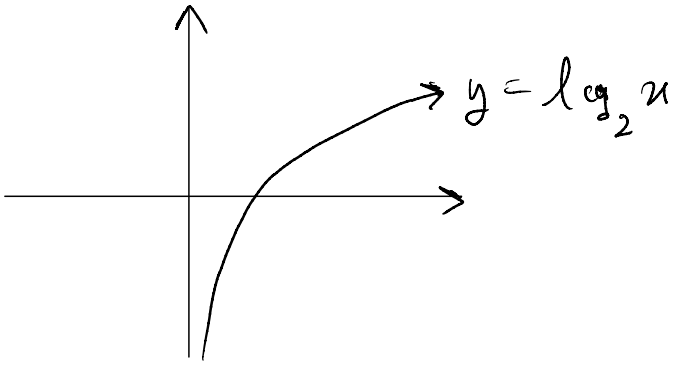
จาก $f(x)$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 $\therefore$ $f^{-1}(x)$ เป็นฟังก์ชัน

10. $f(x) = 2^x$

$x = 2^{f^{-1}(x)}$

$\log_2 x = \log_2 2^{f^{-1}(x)}$

$f^{-1}(x) = \log_2 x$



จาก $f(x)$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 $\therefore$ $f^{-1}(x)$ เป็นฟังก์ชัน

ตะลุยโจทย์

$-(1-x)(3-x)$

$1-x(x+2)$

1. ให้ $f(x) = 1 - 2x - x^2$ จงหา $f(1 - x),\ f(x^2),\ f(- x)$

$f(1-x) = 1-2(1-x)-(1-x)^2$

$= 1-2+2x-1+2x-x^2$

$= -x^2+4x-2$

$f(x^2) = 1-2x^2-x^4$

$f(-x) = 1-2(-x)-(-x)^2 = -x^2+2x+1$

2. $f(2x + 1) = 4x + 3$ จงหา $f(f(f(x)) - x)$

$f(2x+1) = 2(2x+1)+1$

$f(x) = 2x+1$

$f(f(x)) = 4x+3$

$f(f(f(x))-x) = f(4x+3-x)$

$= f(3x+3)$

$= 2(3x+3)+1$

$= 6x+7$

3. ให้ $f(\frac{x}{x-1}) = \frac{1}{x}$ เมื่อ $x \neq 0, 1$ จงหา $g(x) = f(f(x))$ และ D_g

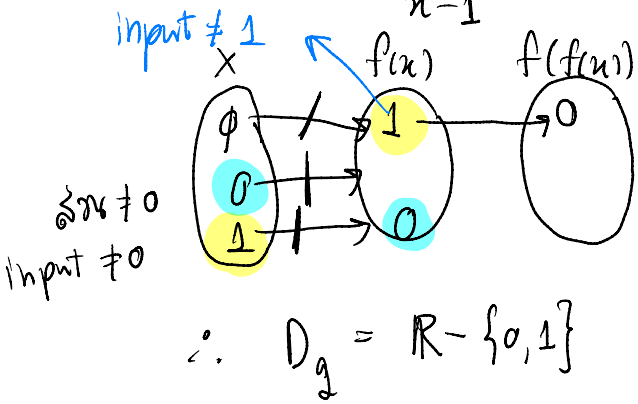
$$f\left(\frac{x}{x-1}\right) = \left(\frac{1}{x} - 1\right) + 1$$

$$= -\left(\frac{x-1}{x}\right) + 1$$

$$f(x) = -\frac{1}{x} + 1 = \frac{x-1}{x}$$

$$g(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{x-1}{x}\right) = -\frac{1}{\frac{x-1}{x}} + 1$$

$$= -\frac{x}{x-1} + 1 = -\frac{1}{x-1}$$



$\therefore D_g = \mathbb{R} - \{0, 1\}$

4. ให้ $f = \{(1,0),(2,1),(3,5),(4,3),(5,2)\}$ จงหา

$f^{-1}(f^{-1}(2)) + f^{-1}(3)$

$f^{-1} = \{(0,1),(1,2),(2,5),(3,4),(5,3)\}$

$f^{-1}(f^{-1}(2)) + f^{-1}(3)$

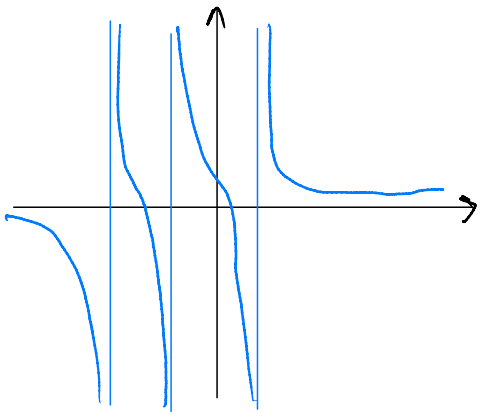
$= f^{-1}(5) + 4$

$= 3 + 4 = 7$

5. หา D_f, R_f ของ $f = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid y = \frac{x}{x^2+3x+2} + \frac{2x-1}{x^2-1}\}$

พิจารณารูปสมการต้องการ $x \neq -1, -2, 1$

$\therefore D_f = \mathbb{R} - \{-1, 1, -2\}$

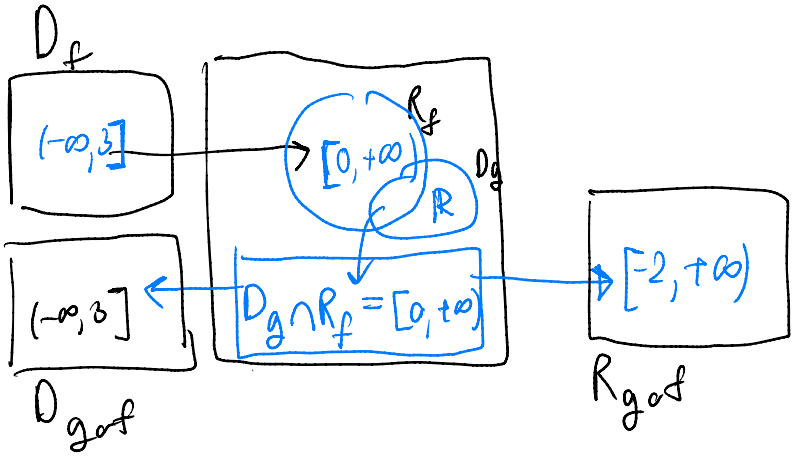


$y = \frac{1}{x+1}\left(\frac{x}{x+2} + \frac{2x-1}{x-1}\right)$

$= \left(\frac{1}{x+1}\right)\left(3 - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{x-1}\right)$

$\therefore R_f = \mathbb{R}$

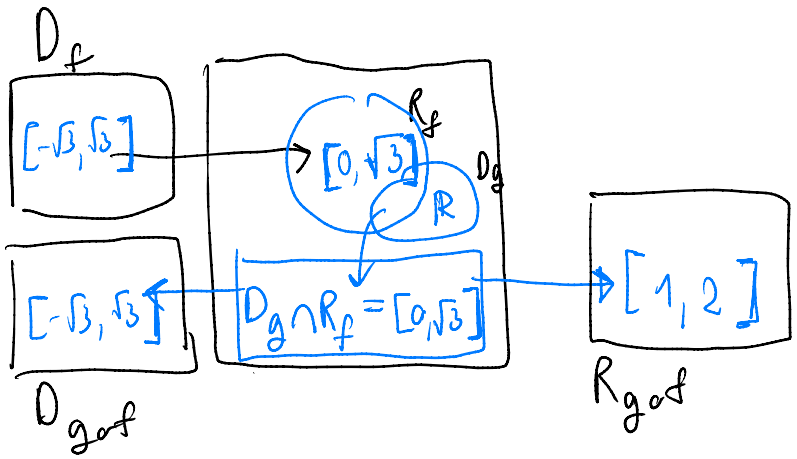
6. ให้ $f(x) = \sqrt{3 - x}$ และ $g(x) = -2 + |x - 4|$ จงหา D_{gof} และ R_{gof}



$\therefore \quad D_{gof} = (-\infty, 3]$

$R_{gof} = [-2, +\infty)$

7. ให้ $f(x) = \sqrt{3 - x^2}$ และ $g(x) = \sqrt{1 + x^2}$ จงหา D_{gof} และ R_{gof} และหาว่า $(gof)^{-1}(x)$ เป็นฟังก์ชันหรือไม่



$\therefore D_{gof} = [-\sqrt{3},\sqrt{3}]$

$R_{gof} = [1,2]$

$(gof)(x) = \sqrt{1+3-x^2} = \sqrt{4-x^2}$

พิจารณา $(gof)(x)$ เป็น 1-1 หรือไม่

ที่ $x = 1, -1$ ให้ค่า y เดียวกัน $\therefore$ ไม่เป็น 1-1

ดังนั้น $(gof)^{-1}(x)$ ไม่เป็นฟังก์ชัน

8. ให้ $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ และ $r = \{(x, y) \in A \times A \mid y = |x| - 2\}$ จงหาว่า r^{-1} เป็นฟังก์ชันหรือไม่ และ $n(r \cap r^{-1})$ และ $D_{r^{-1}}$, $R_{r^{-1}}$

$r = \{(-3,1), (-2,0), (-1,-1), (0,-2), (1,-1), (2,0), (3,1)\}$

r^{-1} ไม่เป็นฟังก์ชัน เนื่องจาก r ไม่เป็น 1-1

$D_{r^{-1}} = R_r = \{-2, -1, 0, 1\}$

$R_{r^{-1}} = D_r = A$

$r \cap r^{-1} = \{(-1,-1), (-2,0), (0,-2)\}$

$n(r \cap r^{-1}) = 3$

9. ให้ $f(x) = \frac{1-x}{x+2}$ เมื่อ $x \in \mathbb{R} - \{-2\}$ และ a เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับ $f(a + f^{-1}(2)) = 1$ จงหาค่าของ a

$$f(x) = \frac{1-x}{x+2} = \frac{-x-2+3}{x+2} = -1 + \frac{3}{x+2}$$

$$x = -1 + \frac{3}{f^{-1}(x)+2}$$

$$f^{-1}(x)+2 = \frac{3}{x+1}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{3}{x+1} - 2 \quad \rightarrow \quad f^{-1}(2) = -1$$

$$f\left(a + f^{-1}(2)\right) = f(a-1) = -1 + \frac{3}{a+1} = 1$$

$$\frac{3}{a+1} = 2$$

$$a+1 = \frac{3}{2}$$

$$a = \frac{1}{2}$$

10. ให้ $f(x) = \sqrt[3]{x}$ และ $g(x) = \frac{x}{1+x}$ หาค่าของ $(f^{-1} + g^{-1})(2)$

$x = \sqrt[3]{f^{-1}(x)}$

$f^{-1}(x) = x^3$

$f^{-1}(2) = 8$

$g(x) = 1 - \frac{1}{1+x}$

$x = 1 - \frac{1}{1+g^{-1}(x)}$

$\frac{1}{1+g^{-1}(x)} = 1 - x$

$g^{-1}(x) = \frac{1}{1-x} - 1$

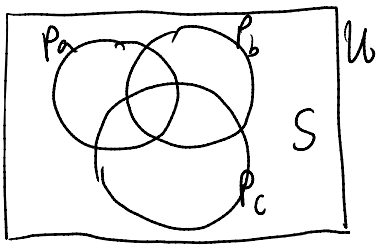
$g^{-1}(2) = -2$

$(f^{-1}+g^{-1})(2) = f^{-1}(2) + g^{-1}(2) = 6$

11. ให้ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ และ $B = \{a, b, c\}$ ให้ $S = \{f \mid f: A \to B$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง$\}$ จงหา $n(S)$

onto = ทั้งหมด - ไม่ onto

ใช้ P_z แทน สามารถสมาชิกเซตของ f ที่สมาชิก $z \in B$ ไม่ถูกจับคู่



$$n(S) = n(U) - \left[(P_a + P_b + P_c) - (P_{a,b} + P_{a,c} + P_{b,c}) + P_{a,b,c}\right]$$

$$= 3^4 - \left[3(2^4) - 3(1^4) + 0\right]$$

$$= 81 - 48 + 3 = 36$$

12. ให้ $f(x) = 3x - 5$ และ $g(x) = 2x + 1$ ให้

$\exists a \in \mathbb{R}, (g^{-1} \circ f^{-1})(a) = 4$ จงหา $(f \circ g)(2a)$

Note $(fog)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$

$(fog)(x) = f(g(x)) = f(2x+1)$

$= 3(2x+1) - 5 = 6x - 2$

$a = 6(fog)^{-1}(4) - 2$

$= 22$

$(fog)(44) = 6(44) - 2 = 262$

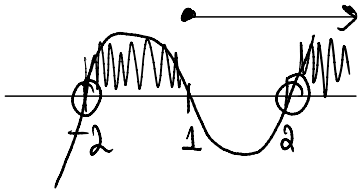
13. หา D_f และ R_f เมื่อ $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x^2-4}} - \sqrt{x-1}$ $y = \sqrt{x-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-4}} - 1\right)$

เงื่อนไขที่ส่งผลกับค่า x : $x \neq 2, -2$

$x - 1 \geq 0$, $\frac{x-1}{x^2-4} \geq 0$

$x \geq 1$

$(x-1)(x-2)(x+2) \geq 0$



$\therefore D_f = \{1\} \cup (2, +\infty)$

พิจารณา $\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

} $f(x)$ ต่อเนื่องที่ $(2, +\infty)$

$\therefore R_f = \mathbb{R}$

14. ให้ $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข

$f(1) = 1$

$f(2x) = 4f(x) + 6$ ——— ①

$f(x + 2) = f(x) + 12x + 12$ ——— ②

จงหาค่าของ $f(7) + f(16)$

จาก ② แทน $x = 5, 3, 1$

$f(7) = f(5) + 12(6)$

$f(5) = f(3) + 12(4)$

$f(3) = f(1) + 12(2)$

} + ③

$f(7) = f(1) + 12(12) = 145$

จาก ① แทน $x = 1, 2, 4, 8$

$f(2) = 4f(1) + 6 = 10$

$f(4) = 4f(2) + 6 = 46$

$f(8) = 4f(4) + 6 = 190$

$f(16) = 4f(8) + 6 = 766$

$f(7) + f(16) = 911$

15. ให้ $f(x) = \frac{x+3}{x+6}$ และ $(f^{-1} \circ g)(x) = \frac{-6x}{x-1}$ หาค่า a ที่ทำให้ $g(a) = 2$

$$f(x) = \frac{x+6-3}{x+6} = 1 - \frac{3}{x+6}$$

$$x = 1 - \frac{3}{f^{-1}(x)+6}$$

$$\frac{3}{f^{-1}(x)+6} = 1-x$$

$$f^{-1}(x) = \frac{3}{1-x} - 6$$

$$f^{-1}(g(x)) = \frac{-6x}{x-1}$$

$x=a$; $f^{-1}(g(a)) = -\frac{6a}{a-1} = -\frac{6a-6+6}{a-1}$

$$f^{-1}(2) = -6 - \frac{6}{a-1}$$

$$\frac{3}{1-2} - 6 = -6 + \frac{6}{a-1}$$

$$a = 3$$

16. ให้ $f(\frac{1-x}{1+x}) = x$ จงหา $f(f(x))$

$$f\left(-1+\frac{2}{1+x}\right) = \frac{2}{\left[\left(-1+\frac{2}{1+x}\right)+1\right]} - 1$$

$$f(x) = \frac{2}{x+1} - 1$$

$$f(f(x)) = \frac{2}{\left(\frac{2}{x+1}-1\right)+1} = x+1$$

17. ให้ $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ที่สอดคล้องกับ $f(x+y) = f(x) + f(y) + 4xy$ และ $f(1) = 4$ หาค่าของ $f(20)$

พิจารณา $(x, 1)$; $f(x+1) = f(x) + f(1) + 4x$

$$= f(x) + 4x + 4$$

พิจารณา $\sum_{x=1}^{19} f(x+1) = \sum_{x=1}^{19} f(x) + \sum_{x=1}^{19} (4x+4)$

$$f(20) + \sum_{x=2}^{19} f(x) = \sum_{x=2}^{19} f(x) + f(1) + 4 \cdot \frac{(1+19)(19)}{2} + 4 \cdot 19$$

$$f(20) = 4 \cdot 20 + 38 \cdot 20 = 840$$

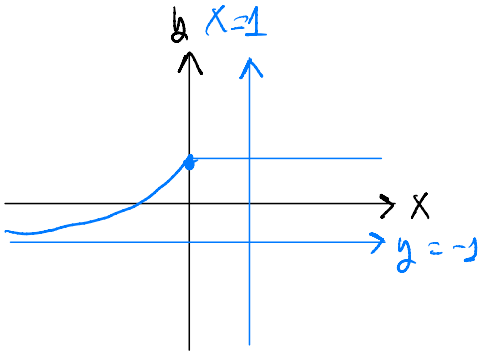
18. $r = \{(x, y) \in R \times R \mid |x|y + y - x - 1 = 0\}$ พิจารณา D_r, R_r, r เป็นฟังก์ชันทั่วถึงหรือไม่ และพิจารณาว่า r^{-1} เป็นฟังก์ชันหรือไม่

จัดรูป $y(|x|+1) = x+1$

$$y = \frac{x+1}{|x|+1} \qquad D_r = \mathbb{R}$$

case $x \geq 0$; $y = 1$

case $x < 0$; $y = \frac{x+1}{-x+1} = \frac{x-1+2}{-x+1} = -1 + \frac{2}{-x+1}$



$\therefore R_f = (-1, 1]$

r ไม่ทั่วถึงจาก $r: R \to R$

และ r^{-1} ไม่เป็นฟังก์ชัน เนื่องจากไม่ 1-1 ช่วง $x \geq 0$

19. ให้ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x+5) = x^3 - x^2 + 2x$ และ $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g^{-1}(2x-1) = x+4$ จงหา $(f-g)(0)$ และ $(g \circ f)(x)$

$g^{-1}(2x-1) = x - \frac{1}{2} + \frac{9}{2}$

$g^{-1}(x) = \frac{x}{2} + \frac{9}{2}$

$x = \frac{g(x)+9}{2}$

$g(x) = 2x - 9$

$f(x+5) = x^3 - x^2 + 2x$

$f(u-5+5) = (u-5)^3 - (u-5)^2 + 2(u-5)$

$f(u) = u^3 - 16u^2 + 87u - 160$

$(f-g)(0) = f(0) - g(0) = -160 + 9 = -151$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2(x^3 - 16x^2 + 87x - 160) - 9$

$= 2x^3 - 32x^2 + 174x - 329$

20. ให้ f เป็นฟังก์ชันพหุนาม $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(f \circ f)(x) = 4 + x(4 - f(x))$ จงหาค่า $f(4)$

ลอง $x = 0$; $f(f(0)) = 4$

$x = f(0)$; $f(f(f(0))) = 4 + 4f(0) - f(0)f(f(0))$

$f(4) = 4 + 4f(0) - 4f(0)$

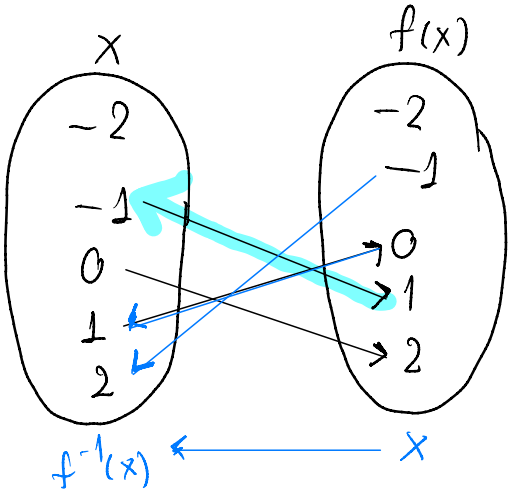
$f(4) = 4$

21. ให้ $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ และ $f: A \to A$ และ f เป็นฟังก์ชัน $1-1$ และทั่วถึง กำหนดค่าบางค่าในตาราง

1-1 หมายถึง $\rightarrow n(LHS) = n(RHS)$ และจับคู่กันไม่ซ้ำ

x	$f(x)$	$f^{-1}(x)$
-1	1	2
0	2	1
1	0	a

จงหาค่าของ $a + f(-2) + f^{-1}(2)$



$a = f^{-1}(1) = -1$

$f(-2) = -2$

$f^{-1}(2) = 0$

$a + f(-2) + f^{-1}(2) = -3$