หลักการนับเบื้องต้น

หลักการคูณ

ถ้าสามารถแบ่งขั้นตอนการทำงานออกเป็น k ขั้นตอน ทำได้ขั้นตอนละ n_k วิธี

ซึ่งต้องทำต่อเนื่องกันแล้วงานจะเสร็จ จะสามารถทำงานนี้ได้ทั้งหมด $\prod_{i=1}^{k} n_i$ วิธี

$$\prod_{i=1}^{k} n_i = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$$

ตัวอย่าง

มีเสื้อ 5 ตัว และกางเกง 3 ตัว ที่แตกต่างกัน หากต้องการเลือกเสื้อ 1 ตัว และกางเกง 1 ตัว เพื่อสวมใส่ จะมีวิธีเลือกชุดที่แตกต่างกันได้ทั้งหมดกี่วิธี

สามารถเลือกเสื้อได้ = 5 วิธี

สามารถเลือกกางเกงได้ = 3 วิธี

เลือกชุดเพื่อสวมใส่ได้ = 5x3 = 15 วิธี

จงหาคำตอบต่อไปนี้ (ไม่จำเป็นต้องคำนวณเลข ถ้าคำนวณลำบาก)

1. ร้านอาหารมีเมนูอาหารจานหลัก 4 รายการ และเมนูของหวาน 2 รายการ หากต้องการสั่งอาหารจานหลัก 1 อย่าง และของหวาน 1 อย่าง จะมีวิธีสั่งอาหารที่แตกต่างกันได้ทั้งหมดกี่วิธี

2. ถ้าทอดลูกเต๋า 2 ลูก จะมีผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นทั้งหมดกี่แบบ

3. ในการเดินทางจากบ้านไปโรงเรียนและกลับมาบ้าน ขาไปสามารถเลือกเส้นทางได้ 5 เส้นทาง ขากลับเลือกได้ 3 เส้นทาง จะเลือกทางได้ทั้งหมดกี่เส้นทาง

4. ต้องการสร้างคำ 3 ตัวอักษร จากตัวอักษร 5 ตัวที่กำหนดให้ โดย อนุญาตให้ใช้ตัวอักษรซ้ำได้ จะสร้างคำที่แตกต่างกันได้กี่คำ

5. มีตัวอักษร A, B, C, D หากต้องการเรียงสับเปลี่ยนตัวอักษร 3 ตัว โดย ไม่ให้ตัวอักษรซ้ำกัน จะเรียงสับเปลี่ยนได้กี่แบบ

6. ต้องการสร้างหมายเลขโทรศัพท์ 10 หลัก โดยหลักแรกต้องเป็นเลข 0 และหลักที่สองต้องเป็นเลข 9 ส่วนหลักที่เหลือเป็นเลขโดด 0-9 ใด ๆ ก็ได้ จะสร้างหมายเลขโทรศัพท์ที่แตกต่างกันได้ทั้งหมดกี่หมายเลข

7. ต้องการสร้างรหัสผ่าน 4 ตำแหน่ง โดยตำแหน่งที่ 1 เป็นตัวอักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์ใหญ่ (A-Z) ตำแหน่งที่ 2 เป็นตัวเลข 0-9 ตำแหน่งที่ 3 และ 4 เป็นตัวอักษรพิมพ์ใหญ่ หรือ ตัวเลข โดยอนุญาตให้ซ้ำได้ จะสร้างรหัสผ่านได้กี่แบบ

8. มีบัตรคำ 5 ใบ คือ M, A, T, H, S ต้องการนำมาเรียงสับเปลี่ยนเป็นคำ 5 ตัวอักษร โดยมีข้อแม้ว่า **ตัวอักษร S ต้องอยู่ตำแหน่งสุดท้าย** จะเรียงได้กี่แบบ

หลักการบวก

ถ้าสามารถแบ่งวิธีการทำงานหนึ่งออกเป็น k กรณี โดยในแต่ละกรณีทำให้งานเสร็จสมบูรณ์ ทำได้กรณีละ n_k วิธี แล้วจะสามารถทำงานนี้ได้ทั้งหมด $\sum_{i=1}^{k} n_i$ วิธี

ตัวอย่าง

มีปากกาสีดำ 15 ด้าม และปากกาสีน้ำเงิน 12 ด้าม วางอยู่ในกล่อง ถ้าต้องการหยิบปากกาเพียง 1 ด้าม จะมีวิธีเลือกปากกาได้ทั้งหมดกี่วิธี?

ได้ว่า การเลือกปากกาสามารถเลือกปากกาสีดำ ได้ 15 วิธี และสามารถเลือกปากกาสีดำ ได้ 12 วิธี และเหตุการณ์ทั้ง 2 กรณีไม่ซ้ำซ้อนกัน ดังนั้น จำนวนวิธีรวมคือผลรวมของจำนวนปากกาทั้งสองสี 15 + 12 = 27

จงหาคำตอบต่อไปนี้

1. นักเรียนคนหนึ่งต้องการเดินทางไปโรงเรียน โดยมีทางเลือก 3 ประเภท: รถส่วนตัว 2 คัน, รถโดยสารประจำทาง 4 สาย, หรือรถไฟฟ้า 1 สาย จะมีวิธีเลือกเดินทางที่แตกต่างกันทั้งหมดกี่วิธี

2. ในการสุ่มเลือกเลขโดด 1 หลักในระบบเลขฐาน 10 จะมีวิธีเลือกเลขโดดที่เป็น เลขคี่ที่มากกว่า 5 หรือเลขคู่ ได้ทั้งหมดกี่วิธี?

3. ต้องการสร้างรหัส 1 ตัวอักษร ตัวอักษรต้องมาจากภาษาอังกฤษตัวพิมพ์ใหญ่ หรือ ตัวอักษรไทย จะมีวิธีสร้างรหัสที่แตกต่างกันได้ทั้งหมดกี่แบบ

4. ร้านกาแฟแห่งหนึ่งมีเมนูเครื่องดื่ม 4 ประเภท ได้แก่ กาแฟ, ชา, น้ำผลไม้, และเครื่องดื่มปั่น โดยมีตัวเลือกเป็นกาแฟ 8 เมนู, ชา 5 เมนู, น้ำผลไม้ 3 เมนู และเครื่องดื่มปั่น 4 เมนู หากลูกค้าต้องการสั่งเครื่องดื่มเพียง 1 เมนูเท่านั้น จะมีวิธีเลือกเครื่องดื่มที่แตกต่างกันทั้งหมดกี่วิธี

5. มีบัตรหมายเลข 1 ถึง 41 หากสุ่มหยิบบัตร 1 ใบ จะมีวิธีหยิบได้บัตรที่สามารถเขียนในรูปจำนวนเต็มยกกำลัง 2 หรือบัตรที่เป็น เลขที่หารด้วย 10 ลงตัว ได้ทั้งหมดกี่วิธี

จงหาคำตอบต่อไปนี้ (Hint: ใช้ทั้งกฎการคูณและการบวก ลองแบ่งกรณีคิด)

1. ร้านอาหารมีชุดอาหารกลางวัน 2 แบบ: ชุด A มีอาหารจานหลัก 3 อย่างและเครื่องดื่ม 2 อย่าง หรือ ชุด B มีอาหารจานหลัก 4 อย่างและเครื่องดื่ม 3 อย่าง หากต้องการเลือกสั่งชุดอาหารเพียงชุดเดียว จะมีวิธีเลือกสั่งอาหารได้ทั้งหมดกี่วิธี

2. ในการเดินทางจากเมือง A ไปเมือง C สามารถทำได้โดยผ่านเมือง B หรือ ผ่านเมือง D จาก A ไป B มี 3 เส้นทาง, จาก B ไป C มี 4 เส้นทาง, จาก A ไป D มี 2 เส้นทาง และจาก D ไป C มี 5 เส้นทาง จะมีเส้นทางจาก A ไป C ที่แตกต่างกันทั้งหมดกี่เส้นทาง

3. มีบัตรตัวเลข 0, 1, 2, 3, 4, 5 ต้องการสร้างเลขที่มีค่าเป็นเลข 4 หลัก โดย**ห้ามใช้เลขซ้ำ** จะสร้างเลขที่หารด้วย 5 ลงตัว ได้กี่จำนวน

4. มีบัตรตัวเลข 1 ถึง 6 ต้องการสร้างเลข 4 หลัก โดย ห้ามใช้เลขซ้ำ และมีค่าน้อยกว่า 3420 จะสร้างเลขได้กี่จำนวน

5. มีนักเรียนชาย 5 คน และนักเรียนหญิง 4 คน หากต้องการจัดนักเรียน 4 คนเข้าแถวถ่ายรูป โดยกำหนดให้หัวแถวต้องเป็นผู้ชาย หรือ ท้ายแถวต้องเป็นผู้หญิง จะจัดได้กี่วิธี

การจัดหมู่ของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด

สมมติว่ามีของที่ต่างกัน n ชิ้น โดยต้องการเลือกมาใช้ k ชิ้น

หลักการ

การเลือกของชิ้นที่ 1 ทำได้ n วิธี

การเลือกของชิ้นที่ 2 ทำได้ n-1 วิธี

การเลือกของชิ้นที่ 3 ทำได้ n-2 วิธี

$\vdots$

การเลือกของชิ้นที่ k ทำได้ n-k+1 วิธี

โดยเป็นการเลือกแบบไม่มีลำดับ คือเลือกอันไหนก่อนหลังก็เหมือนกัน เกิดวิธีซ้ำ $k!$

โดยหลักการคูณ จำนวนวิธีคือ $\frac{\prod_{i=1}^{k}(n-i+1)}{k!}$ และสามารถเขียนในรูปที่ง่ายขึ้นได้ว่า $\frac{n!}{k!(n-k)!}$

หรือจะใช้แทนว่า $C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

ตัวอย่างการใช้

สมมติว่ามีข้อสอบอยู่ 20 ข้อ ต้องการเลือกทำ 10 ข้อ จะมีวิธีการทำได้กี่วิธี

จะเห็นว่าเป็นการเลือก 20 อย่างที่แตกต่างกันโดยไม่สนใจลำดับก่อนหลัง

จำนวนวิธีคือ $\binom{20}{10}$

<u>เพิ่มเติม</u>

พิจารณาจากสมการ $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ จะได้ว่า $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

คือมองว่า จำนวนวิธีเลือกของที่สนใจ เท่ากับจำนวนวิธีในการเลือกของที่ไม่สนใจออก

จงหาจำนวนวิธีในการเรียงสับเปลี่ยนต่อไปนี้ (ไม่จำเป็นต้องคำนวณค่า)

1. มีนักเรียน 10 คน หากต้องการเลือกนักเรียนมา 3 คน เพื่อไปแข่งขันคณิตศาสตร์ จะมีวิธีเลือกได้ทั้งหมดกี่วิธี

2. ในการเลือกซื้อผลไม้ 3 ชนิด จากผลไม้ที่มีอยู่ 8 ชนิด จะมีวิธีเลือกได้ทั้งหมดกี่วิธี

3. มีพนักงาน 10 คน แบ่งเป็นพนักงานระดับอาวุโส 4 คน และระดับปฏิบัติการ 6 คน หากต้องการเลือกคณะทำงาน 3 คน โดยคณะทำงานต้องมี พนักงานอาวุโส 1 คน และพนักงานปฏิบัติการ 2 คน จะเลือกได้กี่วิธี

4. กล่องใบหนึ่งมีบัตรหมายเลข 1 ถึง 10 หากสุ่มหยิบบัตร 3 ใบพร้อมกัน จะมีวิธีหยิบได้บัตรที่มี หมายเลขคี่อย่างน้อย 2 ใบ ได้กี่วิธี

5. มีนักเรียน 15 คน หากต้องการแบ่งนักเรียนออกเป็น 3 กลุ่ม กลุ่มละ 5 คน เพื่อทำกิจกรรมที่แตกต่างกัน จะแบ่งได้กี่วิธี

6. ในการเลือกซื้ออุปกรณ์ 7 ชิ้น จากรายการที่มี 5 กลุ่ม โดยแต่ละกลุ่มมี 4 ชิ้นที่แตกต่างกัน หากการเลือกต้อง ครบทั้ง 5 กลุ่ม จะเลือกได้กี่วิธี

7. มีนักเรียนชาย 5 คน หญิง 5 คน เลือกมา 6 คนเพื่อยืนเรียงแถวถ่ายรูป โดยกำหนดให้มี ชาย 3 คนและหญิง 3 คน และหญิง 3 คนนี้ยืนติดกันเสมอ จะจัดได้กี่วิธี

การเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น

สมมติว่ามีคนที่ต่างกัน n คน โดยต้องการเลือกมายืนต่อแถว k คน

หลักการ

การเลือกของมาเรียงในตำแหน่งที่ 1 ทำได้ n วิธี

การเลือกของมาเรียงในตำแหน่งที่ 2 ทำได้ n-1 วิธี

การเลือกของมาเรียงในตำแหน่งที่ 3 ทำได้ n-2 วิธี

$\vdots$

การเลือกของมาเรียงในตำแหน่งที่ k ทำได้ n-k+1 วิธี

โดยหลักการคูณ จำนวนวิธีคือ $\prod_{i=1}^{k}(n - i + 1)$ และสามารถเขียนในรูปที่ง่ายขึ้นได้ว่า $\frac{n!}{(n-k)!}$

หรือจะใช้แทนว่า $P_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!}$

จงหาจำนวนวิธีในการเรียงสับเปลี่ยนต่อไปนี้ (ไม่จำเป็นต้องคำนวณค่า)

1. มีตัวอักษร A, B, C, D, E หากต้องการนำตัวอักษรเหล่านี้มาเรียงเป็นคำที่มีความหมายหรือไม่มีความหมายก็ตาม จำนวน 3 ตัวอักษร จะเรียงได้กี่วิธี โดยใช้ตัวอักษรได้ตัวละมากสุด 1 ครั้ง

2. ต้องการสร้างเลข 4 หลักจากเลขโดด 1, 2, 3, 4, 5, 6 โดย ห้ามใช้เลขซ้ำ และ หลักพันต้องเป็นเลข 6 จะสร้างได้กี่จำนวน

3. จัดเรียงคน 7 คนเข้าแถว โดยกำหนดให้นาย A ยืนหัวแถว และนาย B ยืนท้ายแถว จะจัดได้กี่วิธี

4. จัดเรียงชาย 3 คน หญิง 3 คนเข้าแถว โดยให้ ชายหญิงยืนสลับกันพอดี จะจัดได้กี่วิธี

ในการจัดเรียง เป็นปกติที่โจทย์จะมีเงื่อนไขเพิ่มเติม ยกตัวอย่างเพิ่มเติมสำหรับเงื่อนไขที่บังคับของติดกัน

ตัวอย่าง

โจทย์: จัดเรียงนักเรียน 8 คนเข้าแถว โดยที่นาย A และ นาย B ต้องยืนติดกัน สามารถทำได้กี่วิธี

โดยการทำ ในเมื่อ A และ B ยืนติดกันอยู่แล้ว จะมองว่าเป็นของ 1 ชิ้น และอย่าลืมว่า A และ B สลับกันได้

จำนวนวิธีจึงเท่ากับ 2 เท่าของการจัดเรียงของ 7 ชิ้นในแนวเส้นตรง

5. มีคำว่า Putin ต้องการนำมาเรียงใหม่ โดยที่ต้องมี P และ น อยู่ติดกันเสมอ จะสร้างได้กี่วิธีโดยไม่สนใจความหมาย

6. ลงคอร์สคณิตพี่ภูผา 10 คอร์ส, ฟิสิกส์ 4 คอร์ส, ielts 4 คอร์ส ที่แตกต่างกันทั้งหมด โดยต้องการเรียงให้จบทีละวิชา จะดูได้กี่วิธี

7. จัดเรียงชาย 5 คน หญิง 5 คนเข้าแถว โดยกำหนดให้ผู้หญิงทุกคนยืนติดกันจะจัดได้กี่วิธี

8. มีนักเรียนชาย 7 คน หญิง 11 คนเลือกนักเรียน 3 คนมาเข้าแถวถ่ายรูป โดยกำหนดให้มีผู้ชายอย่างน้อย 2 คน และผู้ชายทุกคนที่ถูกเลือกต้องยืนติดกันเสมอ จะจัดได้กี่วิธี

ยกตัวอย่างเพิ่มเติมสำหรับเงื่อนไขที่บังคับของไม่ติดกัน

โจทย์: จัดเรียงนักเรียน 8 คนเข้าแถว โดยที่นาย A และ นาย B ต้องไม่ยืนติดกัน สามารถทำได้กี่วิธี

โดยการทำ เมื่อ A และ B ไม่ยืนติดกัน จะจัดเรียงคนอื่นก่อน จากนั้นแทรก A และ B เข้าไป

การจัดเรียงคนอื่นทำได้ = $6!$

โดยระหว่างนักเรียน 6 คนมีช่องให้แทรกทั้งหมด 7 ช่อง (รวมหน้าหลัง)

คนแรกจะแทรกได้ 7 วิธี

คน 2 จะแทรกได้ 6 วิธี

ดังนั้นมีวิธีการจัดเรียงดังกล่าวทั้งหมด $42 \cdot 6! = 6 \cdot 7!$

9. จัดเรียงคำว่า Rudolf ใหม่โดยที่ R กับ u ไม่ติดกัน จะจัดได้กี่วิธี

10. มีโปเกม่อนธาตุน้ำ 11 ตัว และโปเกม่อนธาตุไฟ 9 ตัว ต้องการซัมม่อนโปเกม่อนทุกตัว โดยที่จะไม่ซัมม่อนโปเกม่อนธาตุไฟติดกัน จะจัดเรียงการซัมม่อนได้กี่วิธี

ยกตัวอย่างเพิ่มเติมสำหรับการคิดตรงข้าม

โจทย์: จัดเรียงนักเรียน 8 คนเข้าแถว โดยที่นาย A และ นาย B ต้องไม่ยืนติดกัน สามารถทำได้กี่วิธี

โดยการทำ เราจะมองว่าจำนวนวิธีหาได้จากการนำวิธีที่นำมาเรียงแบบไม่มีเงื่อนไข ลบด้วยวิธีที่ทั้ง A และ B ยืนติดกัน

โดยเรารู้มาแล้วจากตัวอย่างก่อนหน้าว่าวิธีที่ทั้ง A และ B ยืนติดกัน ทำได้ $2 \cdot 7!$

ดังนั้นมีวิธีการจัดเรียงดังกล่าวทั้งหมด $8! - 2 \cdot 7! = 6 \cdot 7!$ เท่ากับวิธีที่ได้หามา

11. มีนักเรียน 5 คน แต่ละคนมีเก้าอี้ของตัวเอง จะมีวิธีนั่งเก้าอี้โดยมีนักเรียน อย่างน้อย 2 คน นั่งผิดเก้าอี้กี่วิธี

12. จงหาจำนวนวิธีที่จะจั่วไม่ได้โพแดง(13 ใบ)จากใบบนสุดของสำรับ 2 ใบติดกัน จากไพ่สำรับมาตรฐาน (52 ใบ)

13. ต้องการถ่ายรูปตัวแทนจากหัวหน้าคณะสี 2 สี A และ B โดย A มีตัวแทน 3 คน B มีตัวแทน 10 คน หากต้องการจัดตัวแทน 6 คนเข้าแถวถ่ายรูป โดยกำหนดให้มีคนจาก B อย่างน้อย 2 คนยืนติดกัน จะจัดได้กี่วิธี

14. จัดเรียงตัวอักษร A, B, C, D, E, F จำนวน 4 ตัวอักษรโดยให้ไม่มีตัวอักษร A หรือไม่มีตัวอักษร B ปรากฏอยู่ จะจัดได้กี่วิธี

การเรียงสับเปลี่ยนของซ้ำ

สมมติว่าจะจัดเรียง A, B, C, D และ E แบบเส้นตรง จะจัดได้ 5! วิธี

ทีนี้สมมติว่า A และ B เป็นของสิ่งที่เหมือนกัน จะได้ว่าการสลับ A และ B จะได้ 1 วิธี ดังนั้นจะหาวิธีที่ซ้ำคือการสลับกัน ได้ = 2! วิธี

ดังนั้นจะบอกได้ว่า ถ้ามีสิ่งของ n ชิ้น ซึ่งมี n_k ชิ้นที่เหมือนกันในกลุ่มที่ k โดยที่ $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$ แล้วจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยน เท่ากับ $\frac{n!}{(n_1)!(n_2)!(n_3)!\ldots(n_k)!}$ วิธี

ตัวอย่าง

โจทย์: จงหาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยน A, A, A, B, B, B, C, C, D โดยไม่สนความหมาย

พิจารณาการเรียงแบบเส้นตรง ทำได้ = 9! วิธี

ของซ้ำจาก A = 3!, ของซ้ำจาก B = 3!, ของซ้ำจาก C = 2!

หารของซ้ำ = (3!)(3!)(2!)

ดังนั้นจำนวนวิธี = $\frac{9!}{(3!)(3!)(2!)} = 7!$

จงหาจำนวนวิธีในการเรียงสับเปลี่ยนต่อไปนี้ (ไม่จำเป็นต้องคำนวณค่า)

1. มีลูกบอลสีแดง 3 ลูก, สีน้ำเงิน 2 ลูก, และสีเขียว 1 ลูก นำมาเรียงเป็นเส้นตรงได้กี่วิธี

2. ต้องการสร้างเลข 8 หลักจากตัวเลข 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 5 โดยกำหนดให้เลขคู่ต้องอยู่ติดกันทั้งหมด จะสร้างได้กี่จำนวน

3. ต้องการสร้างคำใหม่จากการสลับตัวอักษรทั้งหมดของคำว่า SUCCESS จะสร้างได้กี่คำ โดยไม่สนใจความหมาย

4. เดินทางจาก A(0, 0) ไป B(5, 4) โดยต้องเดินไปทางขวาหรือขึ้นบนเท่านั้น และห้ามผ่านจุด C(2, 2) จะมีเส้นทางที่สั้นที่สุดกี่เส้นทาง

การเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลม

เป็นการเรียงของในรูปวงกลม สิ่งที่ต่างจากการเรียงแบบเส้นตรงคือเมื่อเราย้ายสมาชิกตัวแรกไปข้างหลัง จะนับว่าเป็นวิธีเดิม ได้ว่าจำนวนวิธีที่ซ้ำกันจากการดัดแปลงการเรียงสิ่งของ n ชิ้นจากเส้นตรงเป็นวงกลมคือ n วิธี ดังนั้นจำนวนวิธีคือการเรียงแบบวงกลมคือ $(n-1)!$

ตัวอย่าง

มีคน 5 คน นั่งรอบโต๊ะกลม จะจัดได้กี่วิธี

จะได้ว่าจำนวนวิธีคือ (5-1)! = 24 วิธี

จงหาจำนวนวิธีในการเรียงสับเปลี่ยนต่อไปนี้ (ไม่จำเป็นต้องคำนวณค่า)

1. มีลูกปัด 8 ลูกที่ต่างกันทั้งหมด ต้องการนำ 6 ลูกมาร้อยเป็นสร้อยคอจะร้อยได้กี่แบบ

2. คน 6 คน นั่งรอบโต๊ะกลม โดยนาย A และนาย B ต้องนั่งติดกันเสมอจะจัดได้กี่วิธี

3. คน 5 คน นั่งรอบโต๊ะกลม โดยนาย C และนาย D ต้องนั่งไม่ติดกันจะจัดได้กี่วิธี

4. คน 8 คนนั่งรอบโต๊ะกลม โดย นาย E ต้องนั่งอยู่ตรงข้ามกับนาย F เสมอ จะจัดได้กี่วิธี

5. มีเก้าอี้ 10 ตัวรอบโต๊ะกลม ต้องการจัดคน 5 คนมานั่ง จะจัดได้กี่วิธี

หลักการเพิ่มเข้าตัดออกในเซต 2 เซต

จากการที่เซตจะไม่มีสมาชิกซ้ำ ทำให้เมื่อเวลาหา $n(A \cup B)$ อาจจะไม่เท่ากับ $n(A) + n(B)$ เสมอ เนื่องจากจะมีส่วนที่หายไปเนื่องจากซ้ำกันคือ $n(A \cap B)$

ดังนั้นจะหา $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

ตัวอย่างการใช้งาน

โจทย์: มีคน 7 คน นำมานั่งเป็นวงกลม จงหาจำนวนวิธีที่ นาย A และ นาย B ไม่นั่งติดกัน และ นาย A และ นาย C ไม่นั่งติดกัน

แนวคิด

ต้องการ A ไม่ติด B และ A ไม่ติด C = ทั้งหมด – (A ติด B หรือ ติด C)

= ทั้งหมด – [(A ติด B) + (A ติด C) – (A ติดทั้ง B และ C)]

= 720 – (240 + 240 – 48) = 720 – 432 = 288 วิธี

จงหาจำนวนวิธีในการเรียงสับเปลี่ยนต่อไปนี้ (ไม่จำเป็นต้องคำนวณค่า)

1. จัดเรียงตัวอักษรจากคำว่า "COMMITTEE" จงหาจำนวนวิธีที่ อักษร M ทั้งสองตัวไม่อยู่ติดกัน และ อักษร T ทั้งสองตัวไม่อยู่ติดกัน

2. มีหนังสือ 8 เล่มที่แตกต่างกันวางบนชั้น จงหาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนที่หนังสือเล่ม 1 และ 2 ไม่อยู่ติดกัน และหนังสือเล่ม 3 และ 4 ไม่อยู่ติดกัน

3. มีตัวอักษร 10 ตัว นำมานั่งเป็นวงกลม จงหาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนที่ P, H และ U ไม่นั่งติดกันทั้งหมดพร้อมกัน และ A และ T ไม่นั่งติดกัน

ความน่าจะเป็น

คำที่ควรรู้จัก

<u>การทดลองสุ่ม (Random experiment)</u>

การทดลองซึ่งทราบว่าผลลัพธ์อาจจะเป็นอะไรได้บ้าง แต่บอกอย่างแน่นอนไม่ได้ว่า ในแต่ละครั้งที่ทดลองผลที่เกิดขึ้นจะเป็นอะไร เช่น การทอยลูกเต๋า การโยนเหรียญ

<u>ปริภูมิตัวอย่าง (Sample space)</u> แทนด้วยสัญลักษณ์ $n(S)$

เซตที่มีสมาชิกเป็นผลลัพธ์ที่อาจจะเป็นไปได้ทั้งหมดของการทดลองสุ่ม โดยสมาชิกทุกตัวมีโอกาสเกิดขึ้นเท่ากัน

<u>เหตุการณ์ (Event)</u> แทนด้วยสัญลักษณ์ $n(E)$

เซตที่มีสมาชิกเป็นผลลัพธ์ที่เราสนใจจากการทดลองสุ่มซึ่งเป็นสับเซตของปริภูมิตัวอย่าง โดยสมาชิกทุกตัวมีโอกาสเกิดขึ้นเท่ากัน

ความหมายของความน่าจะเป็น

ความน่าจะเป็น หมายถึงจำนวนที่บ่งบอกถึง**โอกาส**ที่เหตุการณ์นั้น ๆ

ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E เขียนแทนด้วย $P(E)$ นิยามโดย

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

$P(E) = 0$ หมายความว่า เหตุการณ์ E ไม่มีโอกาสเกิดขึ้น

$P(E) = 1$ หมายความว่า เหตุการณ์ E จะเกิดขึ้นอย่างแน่นอน

จงหาความน่าจะเป็นต่อไปนี้ (ไม่จำเป็นต้องคำนวณผลสำเร็จ)

1. ในการโยนเหรียญที่เที่ยงตรง 10 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่เหรียญจะออกหัวเพียง 1 ครั้งเท่านั้น

2. ในการสุ่มเลือกอักษร 1 ตัวจากคำว่า PROBABILITY จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้สระ

3. มีลูกบอล 4 สี สีแดง, น้ำเงิน, เขียว, เหลือง สีละ 1 ลูก นำมาจัดเรียงเป็นแถวตรง จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกบอลสีแดงจะอยู่ตำแหน่งแรก

4. มีลูกเต๋า 4 ลูกที่แตกต่างกัน นำมาเรียงซ้อนกันเป็นหอคอย จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าที่มีด้านหมายเลข 1 และ 2 หงายขึ้นจะอยู่ติดกัน

5. ในการสุ่มหยิบลูกบอล 3 ลูกจากกล่องที่มีลูกบอล 5 สี สีละ 4 ลูก โดยที่หยิบทีละลูกแบบใส่คืน และเรียงตามลำดับที่หยิบ จงหาความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ลูกบอลที่มีสีแตกต่างกันทั้งหมด

6. ต้องการจั่วไพ่จากสำรับมาตรฐานแบบไม่ใส่คืน

6.1 ให้ A_1 เป็นเหตุการณ์ที่จะจั่วใบบนสุดได้ไพ่สีดำที่มีหน้าคน (J, Q, K ของดอกจิก และ โพดำ)

จงหา $P(A_1)$

6.2 ให้ A_2 เป็นเหตุการณ์ที่จะจั่วใบรองบนสุดได้ไพ่สีแดง (หัวใจ และ ข้าวหลามตัด)

จงหา $P(A_2|A_1) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)}$

6.3 ให้ A_3 เป็นเหตุการณ์ที่จะจั่วใบที่ 3 จากบนสุดได้ไพ่ตัวเลข (เลข 2 - 10)

จงหา $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$

ทฤษฎีบททวินาม (Binomial Theorem)

ลองพิจารณาการแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้ โดยที่ (x) และ (y) เป็นจำนวนจริงใด ๆ

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

จะสังเกตเห็นรูปแบบคือ เมื่อเราแยกตัวประกอบ$(x+y)^n$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวก เราสามารถทำได้โดยการเลือกอย่างใดอย่างหนึ่งระหว่าง x หรือ y จากแต่ละวงเล็บจำนวน n วงเล็บมาคูณกัน แล้วนำผลลัพธ์ทุกกรณีที่เป็นไปได้มาบวกเข้าด้วยกัน

ดังนั้นจะได้ว่า $(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \ldots + \binom{n}{n}y^n$

ตัวอย่างการใช้งาน

จงหาสัมประสิทธิ์ x^2y^5 จากการกระจาย $(2x+y)^7$

เรามองว่าจะเลือกพจน์ x มา 2 ตัวจาก 7 พจน์ทำได้ $\binom{7}{2}$ วิธี แต่ละพจน์มีค่า $(2x)^2y^5$

ดังนั้นสัมประสิทธิ์ x^2y^5 คือ $4 \cdot \binom{7}{2}$

จงหาสัมประสิทธิ์จากการกระจายพจน์ที่กำหนดให้

1. จงหาสัมประสิทธิ์ของพจน์ x^3 ในการกระจาย $(x+1)^7$

2. จงหาสัมประสิทธิ์ของพจน์ x^4y ในการกระจาย $(x-y)^5$

3. จงหาสัมประสิทธิ์ของพจน์ x^5 ในการกระจาย $(2x - 1)^8$

4. จงหาสัมประสิทธิ์ของพจน์ x^6 ในการกระจาย $(x^2 - 2)^6$

5. หาพจน์ค่าคงที่ ในการกระจาย $(2x - \frac{1}{x})^8$

6. หาพจน์ค่าคงที่ ในการกระจาย $(x^3 - \frac{2}{x})^8$

7. จงหาสัมประสิทธิ์ของพจน์ x ในการกระจาย $(\sqrt{x} + \frac{2}{x^2})^{10}$

8. หาพจน์ค่าคงที่ ในการกระจาย $(2x - \frac{1}{4x^3})^{12}$

โจทย์เพิ่มเติม

มีการ์ดสีขาว 4 ใบ สีแดง 3 ใบ และสีดำ 3 ใบ โดยการ์ดสีเดียวกันแตกต่างกันทุกใบ

1. สุ่มการ์ด 2 ใบ โดยใบแรกไว้ในกล่อง A อีกใบไว้ในกล่อง B จงหาจำนวนวิธีในการสุ่ม

2. จงหาจำนวนวิธีในการเลือกการ์ดมา 2 ใบ โดยทั้ง 2 ใบนั้นมีสีต่างกัน

มีการ์ดสีขาว 4 ใบ สีแดง 3 ใบ และสีดำ 3 ใบ โดยการ์ดสีเดียวกันแตกต่างกันทุกใบ นำการ์ดทั้งหมด 10 ใบมาใส่ไว้ในกล่อง จากนั้นสุ่มหยิบออกมาทีละใบแบบไม่ใส่คืนจำนวน 2 ครั้ง

3. จงหาความน่าจะเป็นที่ทั้ง 2 ใบจะมีสีเดียวกัน

4. จงหาความน่าจะเป็นที่จะหยิบใบแรกได้ สีขาวหรือสีแดง และใบที่ 2 หยิบได้สีแดงหรือสีดำ

A และ B เล่นเกมกันโดยที่แต่ละคนมีการ์ดหมายเลข 1 2 และ 3 โดยในการเล่นแต่ละรอบแต่ละคนจะหยิบการ์ดออกมา 1 ใบ และจะชนะเมื่อหยิบการ์ดเลขสูงกว่า และเสมอเมื่อมีเลขเท่ากัน

5. ใน 1 เกม จงหาโอกาสที่ A จะเสมอ, โอกาสที่ A จะชนะ, และโอกาสที่ A จะแพ้

6. เมื่อเล่นต่อไปจนครบ 4 รอบ โดยการ์ดที่ใช้ไปแล้วจะยังใช้ซ้ำได้ จงหาความน่าจะเป็นที่ A จะชนะตั้งแต่ 3 ครั้งขึ้นไป

7. จากการเล่นเกมโดยใช้กฎเดิมจากหน้าที่แล้ว จงหาความน่าจะเป็นที่ A เล่นทั้งหมด 4 ครั้งพอดีแล้วได้ผลลัพธ์ชนะ 1 ครั้ง แพ้ 1 ครั้ง เสมอ 2 ครั้ง

8. จากการเล่นเกมโดยใช้กฎเดิมจากหน้าที่แล้ว จงหาความน่าจะเป็นที่ A เล่นทั้งหมด 4 ครั้งพอดีแล้วจำนวนครั้งที่ A ชนะเท่ากับจำนวนครั้งที่ B ชนะ

มีบันไดทั้งหมด 10 ขั้น ที่เราจะต้องขึ้น โดยสามารถเลือกขึ้นได้ ครั้งละ 1 ขั้น หรือ ครั้งละ 2 ขั้น แต่มีเงื่อนไขว่าต้องใช้วิธีขึ้นทั้งสองแบบอย่างน้อยหนึ่งครั้ง และจะหาจำนวนวิธีทั้งหมดที่เป็นไปได้ในการขึ้นบันไดนี้ภายใต้เงื่อนไขต่าง ๆ

9. กำหนดให้เราสามารถขึ้นบันไดครั้งละ 2 ขั้นแบบต่อเนื่องกันได้ ถ้าเราขึ้นครั้งละ 2 ขั้น เพียง 3 ครั้ง จะมีจำนวนวิธีที่แตกต่างกันในการปีนทั้งหมดกี่วิธี

10. กำหนดให้เราสามารถขึ้นบันไดครั้งละ 2 ขั้นแบบต่อเนื่องกันได้ จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดในการขึ้นบันได โดยสามารถเลือกขึ้นได้ ครั้งละ 1 ขั้น หรือ ครั้งละ 2 ขั้นอย่างน้อย 1 ครั้ง

หน้านี้จะไม่อนุญาตให้ขึ้นบันได 2 ขั้นติดต่อกัน

11. ถ้าเราปีนครั้งละ 2 ขั้น เพียง 2 ครั้งเท่านั้น จะมีจำนวนวิธีที่แตกต่างกันในการปีนทั้งหมดกี่วิธี

12. จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดในการขึ้นบันไดโดยสามารถเลือกขึ้นได้ ครั้งละ 1 ขั้น หรือ ครั้งละ 2 ขั้นอย่างน้อย 1 ครั้ง

กำหนดให้มีลูกเต๋าถ่วงน้ำหนัก โดยความน่าจะเป็นที่ด้านหมายเลข 6 จะออกบ่อยกว่าด้านอื่น 2 เท่า

13. กำหนดให้ p คือความน่าเป็นที่จะทอยได้ด้านที่ไม่ใช่เลข 6 จงเขียนความน่าจะเป็นที่จะทอยได้ 6 ในรูปของ p

14. จงหาความน่าจะเป็นที่จะทอยได้ 6 อย่างน้อย 1 ครั้ง จากการทอยลูกเต๋าดังกล่าว 2 ครั้ง

15. ทอยลูกเต๋าดังกล่าว 3 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ทอยได้เลข 1-5 ทุกครั้ง

16. ทอยลูกเต๋าดังกล่าว 3 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ทอยได้เลข 6 อย่างน้อย 2 ครั้ง

ทอยลูกเต๋า 3 ครั้ง โดยเลขที่ได้แทนด้วย a, b และ c ตามลำดับการทอย และกำหนดสมการกำลัง 2 $f(x) = ax^2 + bx + c$

17. จงหาความน่าจะเป็นเมื่อให้ b=4 แล้ว สมการ f(x) = 0 จะมี 2 คำตอบที่แตกต่างกัน

18. จงหาความน่าจะเป็นที่ทำให้ $f(10) > 453$

19. จาก Alice in borderland ได้มีคำถามเกี่ยวกับ Birthday paradox ว่า ต้องมีคนจำนวนเท่าไหร่ที่ความน่าจะเป็นในการมีวันเกิดซ้ำกันอย่างน้อย 2 คน จะเกิน 50%

    Q1: จงหาจำนวนคนที่ทำให้ความน่าจะเป็นในการมีวันเกิดซ้ำกันอย่างน้อย 2 คน จะเกิน 50%

    Q2: จงหาจำนวนคนที่ทำให้ความน่าจะเป็นในการมีวันเกิดซ้ำกันอย่างน้อย 2 คน จะเกิน 75%

20. ปัญหา Monty Hall (Monty Hall Problem)

คุณกำลังเล่นเกมโชว์ และมีประตู 3 บานให้เลือก:

หลังประตู 1 บาน มีรถยนต์ (รางวัลใหญ่)

หลังประตู 2 บาน มีแพะ (ไม่มีรางวัล)

คุณถูกขอให้เลือกประตู 1 บาน หลังจากที่คุณเลือกแล้ว พิธีกรซึ่งรู้ว่ารถยนต์อยู่หลังประตูบานใด จะเปิดประตูบานอื่นที่ไม่ใช่บานที่คุณเลือกและไม่มีรถยนต์เพื่อเผยให้เห็นแพะ

คำถาม: พิธีกรให้โอกาสเปลี่ยนใจไปเลือกประตูบานที่ยังปิดอยู่ คุณควรจะเปลี่ยนการตัดสินใจหรือไม่

[สามารถแสดงความน่าจะเป็นในกรณีที่เปลี่ยน และกรณีที่ไม่เปลี่ยน ในการตัดสินใจ]

21. มีลูกสองคน ถ้าทราบว่ามีลูกอย่างน้อยหนึ่งคนเป็นผู้ชาย จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกอีกคนหนึ่งเป็นผู้หญิง

22. มีลูกสองคน ถ้าทราบว่ามีลูกคนโตเป็นผู้ชาย จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกอีกคนหนึ่งเป็นผู้หญิง

23. โรงงานผลิตสบู่แห่งหนึ่งบรรจุสบู่ก้อนลงในกล่อง โดยแต่ละกล่องบรรจุสบู่ 1 ก้อน จากการศึกษาข้อมูลการผลิตพบว่า ความน่าจะเป็นที่กล่องสบู่จะผิดพลาดโดยไม่มีสบู่ก้อนอยู่ภายในเลยเท่ากับ 0.02 ถ้าสุ่มหยิบกล่องสบู่มาทั้งหมด 10 กล่อง จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้กล่องที่ไม่มีสบู่ก้อน (กล่องผิดพลาด) น้อยกว่า 2 กล่อง

24. ร้านอาหารแห่งหนึ่งมีโต๊ะสำหรับจัดเลี้ยงอยู่ 3 โต๊ะ

โต๊ะเล็ก นั่งได้ไม่เกิน 2 คน, โต๊ะกลาง นั่งได้ไม่เกิน 4 คน, โต๊ะใหญ่ นั่งได้ไม่เกิน 6 คน

มีลูกค้าสองกลุ่มจองจัดเลี้ยงพร้อมกัน กลุ่มที่ 1 มีสมาชิกทั้งหมด 6 คน, กลุ่มที่ 2 มีสมาชิกทั้งหมด 3 คน

ร้านต้องการจัดให้นั่งโดยมีกฎดังนี้

คนที่มาคนละกลุ่มกัน ห้ามนั่งโต๊ะเดียวกันเด็ดขาด คนที่มากลุ่มเดียวกัน สามารถนั่งโต๊ะเดียวกัน หรือแยกไปนั่งคนละโต๊ะก็ได้ (ตราบใดที่ไม่เกินความจุของโต๊ะ)

จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดที่ร้านสามารถจัดโต๊ะให้ลูกค้าทั้งสองกลุ่มนี้ได้

25. มีกล่อง 2 ใบ

กล่องใบที่ 1 มีบัตร 3 ใบ แบ่งเป็น บัตรหมายเลข 1 จำนวน 1 ใบ และบัตรหมายเลข 2 จำนวน 2 ใบ

กล่องใบที่ 2 ภายในมีลูกบอลสีแดง 2 ลูก และลูกบอลสีขาว 3 ลูก

วิธีการหยิบมีขั้นตอนดังนี้

- หยิบบัตร 1 ใบจากกล่องใบที่ 1 แบบสุ่ม
- ถ้าบัตรที่หยิบได้เป็นหมายเลข k (k = 1 หรือ 2) ให้หยิบลูกบอลจากกล่องใบที่ 2 โดยไม่ใส่คืน จำนวน k ลูก

จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกบอลทั้งหมดที่หยิบขึ้นมาไม่มีลูกบอลสีแดง

26. ในการจัดเด็ก 7 คน ซึ่งมีอายุ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ขวบตามลำดับ ให้ไปนั่งบนเก้าอี้ 7 ตัวที่ติดหมายเลข 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 โดยมีเงื่อนไขว่า เด็กที่นั่งบนเก้าอี้หมายเลข k จะต้องมีอายุมากกว่าหรือเท่ากับ k – 1 จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดที่สามารถจัดเด็กให้นั่งตามเงื่อนไขดังกล่าวได้

27. พี่ภูผามีลูกปัดที่แตกต่างกันทั้งหมด 9 เม็ด ได้แก่ ลูกปัดสีขาว 3 เม็ด สีชมพู 2 เม็ด สีม่วง 2 เม็ด และสีฟ้า 2 เม็ด ถ้าพี่ภูผาต้องการร้อยลูกปัด โดยการนำลูกปัดทั้งหมดมาวางเรียงต่อกันเป็นวงกลม โดยมีเงื่อนไขดังนี้

- ลูกปัดสีเดียวกันต้องไม่อยู่ติดกัน
- ลูกปัดสีชมพูและสีม่วงต้องไม่อยู่ติดกัน

แล้วมะลิมีวิธีร้อยลูกปัดตามเงื่อนไขที่กำหนดได้ทั้งหมดกี่วิธี

28. มีหนังสือวิชาคณิตศาสตร์ต่างกัน 3 เล่ม หนังสือวิชาภาษาไทยต่างกัน 2 เล่ม และหนังสือภาษาอังกฤษเหมือนกัน 5 เล่ม ถ้าต้องการจัดเรียงหนังสือ 5 เล่มวางบนชั้น โดยมีหนังสือแต่ละวิชาอย่างน้อย 1 เล่ม และมีจำนวนหนังสือวิชาคณิตศาสตร์ และหนังสือวิชาภาษาไทย รวมกันอย่างมาก 3 เล่ม จงหาจำนวนวิธีจัดเรียงหนังสือ 5 เล่ม

29. ต้องการจัดเรียงตัวอักษร P, P, P, H, H, H, U, U, Uทั้งหมด (ไม่คำนึงถึงความหมาย) โดยมีเงื่อนไขว่า ตัวอักษร H ทั้งสามตัวต้องอยู่แยกกันทั้งหมด และตัวอักษร U ทั้งสามตัวต้องอยู่แยกกันทั้งหมด จะมีวิธีการเรียงตัวอักษรดังกล่าวได้ทั้งหมดกี่วิธี

30. โยนเหรียญบาทเที่ยงตรงหนึ่งเหรียญ จำนวน 10 ครั้ง ความน่าจะเป็นที่ได้หัวอย่างน้อย 2 ครั้งติดกัน เท่ากับเท่าใด

31. นาย ก. มีลูก 2 คน โดยมีอย่างน้อย 1 คน เป็นผู้หญิงที่เกิดวันอังคาร จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกทั้ง 2 คน ของนาย ก. เป็นผู้หญิง